

Übersichtsblatt – Bruchgleichungen

Vorbemerkung: Das Skript Terme und Gleichungen wird als Vorwissen vorausgesetzt.
Sehr Hilfreich: Binomische Formeln, Ausklammern, Ausmultiplizieren, Zerlegung in Linearfaktoren

1. Schritt – Die Definitionsmenge

Bruchterme und Bruchgleichungen enthalten in der Regel immer einen Nenner mit Variablen. **Der Nenner eines Bruches darf nie Null sein.** Daher müssen die Fälle, für die der Nenner Null werden könnte, ausgeschlossen werden.

Wie man die Definitionsmenge bestimmt:

Setze den Nenner gleich Null und bestimme die Lösungsmenge. **Diese Lösungsmenge muss von der maximalen Definitionsmenge ausgeschlossen werden.** Dies ist entweder \mathbb{Q} , die Menge der rationalen Zahlen oder \mathbb{R} , die Menge der reellen Zahlen. !

Beispiele:

a) $3x-5x=x+1x$ b) $xx-2=x-2x+2$

a) Nur ein Nenner: $x = 0$, Lösungsmenge: $L = \{0\}$
Definitionsmenge: $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

b) Zwei verschiedene Nenner: $x - 2 = 0$ und $x + 2 = 0$ Lösungsmenge: $L = \{-2; 2\}$
Definitionsmenge: $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 2\}$

2. Schritt – Gleichung vereinfachen und Nenner entfernen

Brüche können durch Kürzen und Erweitern vereinfacht bzw. umgeformt werden, ohne dass sich der Wert des Bruches ändert. Ebenso dürfen wir eine Gleichung auf jeder Seite mit der gleichen Zahl oder auch einem gleichen Term multiplizieren oder dividieren, ohne dass sich die Gleichung ändert. Dies nutzen wir aus, um die Nenner in der Bruchgleichung zu entfernen.

Zunächst werden alle Nenner von allen enthaltenen Brüchen auf den gleichen Hauptnenner gebracht, sofern nicht schon der gleiche Hauptnenner vorkommt.

Beispiele:

a) $3x-5x=x+1x$ b) $xx-2=x-2x+2$

a) *Wir multiplizieren jede Seite mit dem gleichen Term im Nenner: x*

$$3x-5x \cdot x = x+1x \cdot x$$

$$3x-5 \cdot xx = x+1 \cdot xx \quad \text{Jetzt kürzen wir } x$$

$$3x-5=x+1 \quad | +5 \quad | -x \quad \text{Die verbleibende Gleichung wird gelöst wie bekannt.}$$

$$2x=6 \quad | :2$$

$$x=3$$

Erst wenn wir diese Lösung mit der Definitionsmenge verglichen haben, dürfen wir die Lösungsmenge für die Bruchgleichung angeben!

$$L=3$$

b) $x \cdot x - 2 \cdot x + 2 \cdot x + 2 = x - 2 \cdot x + 2 \cdot x - 2 \cdot x - 2$ Wir erweitern jede Seite mit dem jeweiligen Nenner der anderen Seite!

$$x \cdot x - 2 \cdot x + 2 \cdot x + 2 = x - 2 \cdot x + 2 \cdot x - 2 \cdot x - 2 \quad | \cdot (x+2)(x-2)$$

gemeinsamen

Wir multiplizieren mit dem

Nenner. Dieser entfällt dann auf jeder Seite!

$$x \cdot x + 2 = x - 2 \cdot x - 2$$

$$x^2 + 2x = x^2 - 4x + 4 \quad | -x^2$$

$$2x = -4x + 4 \quad | +4x$$

$$6x = 4 \quad | :6$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Vergleich mit der Definitionsmenge: $\frac{2}{3}$ ist in der Definitionsmenge enthalten, also dürfen wir als Lösungsmenge angeben:

$$L = \frac{2}{3}$$

Wird noch ergänzt!