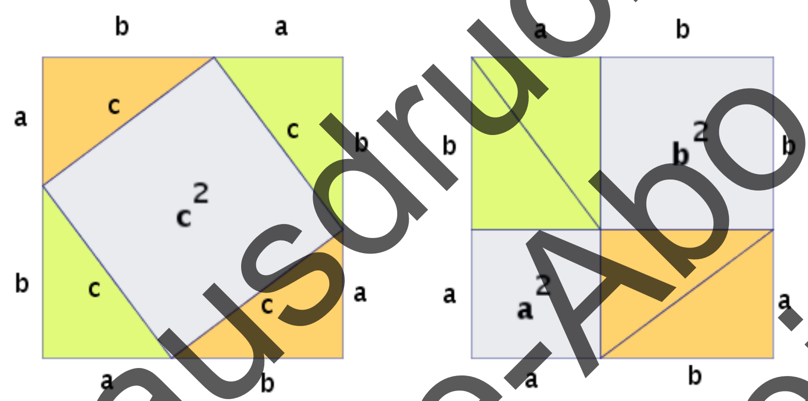
Skript und Übungsaufgaben



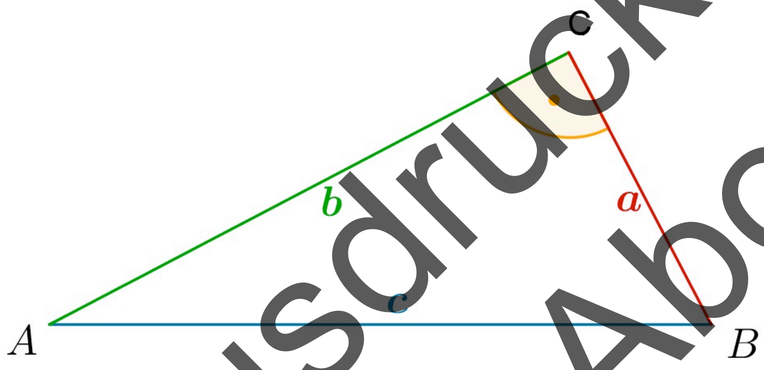
Die Satzgruppe des Pythagoras

Der Satz des Pythagoras

Definition und Beweis

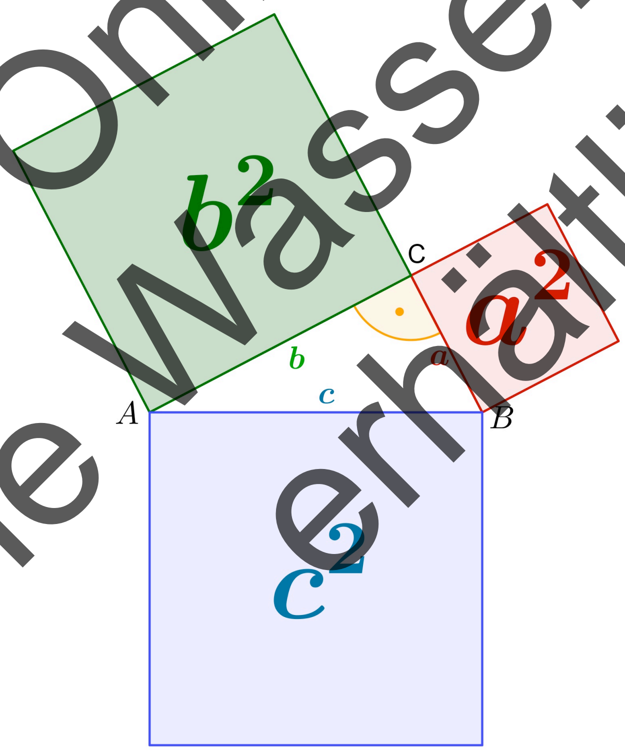
Die Voraussetzungen des Satzes sind:

Sei a,b,c ein rechtwinkliges Dreieck mit den beiden Katheten a,b und der Hypotenuse c.



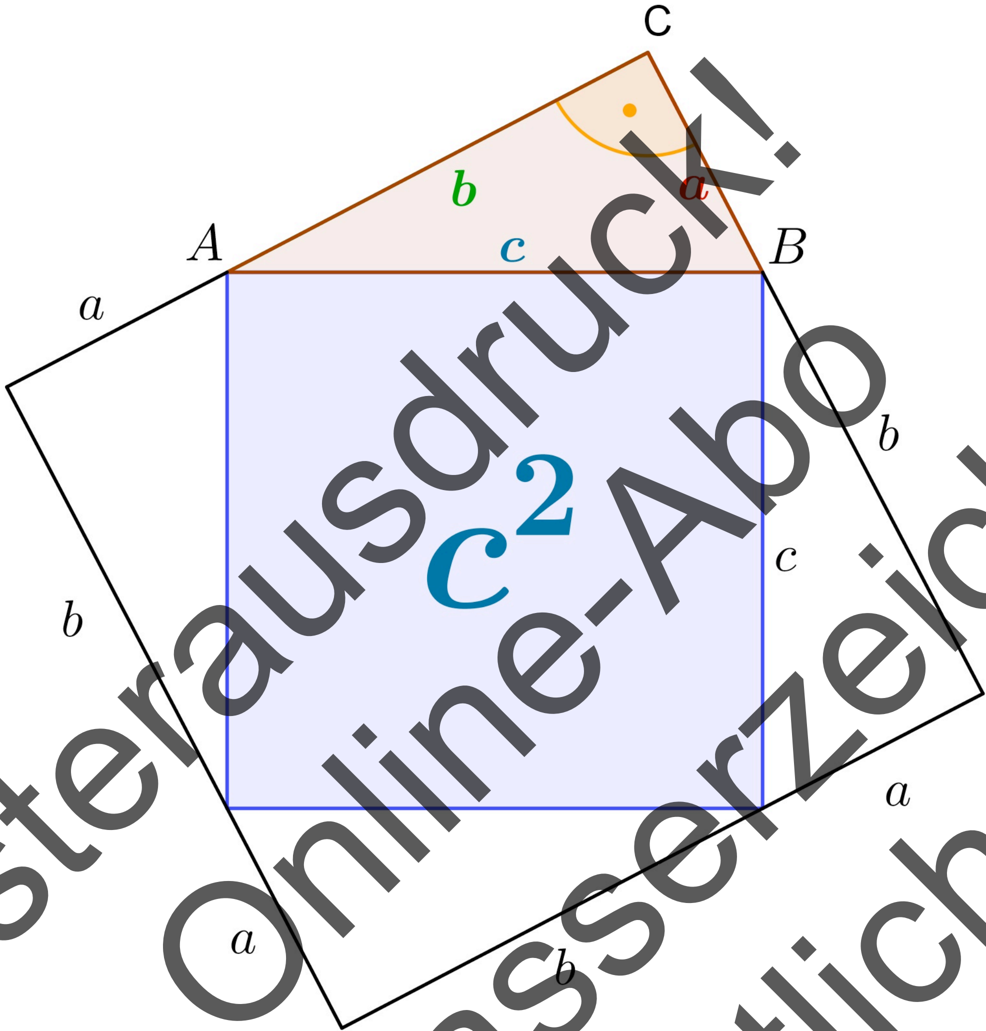
Der Satz des Pythagoras lautet:

Die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat **(**$a^2 + b^2 = c^2$**).**



Oder geometrisch anschaulich:
Die Summe der Flächen der Quadrate über den Katheten $a^2 + b^2$ ***ist gleich der Fläche des Quadrats über der Hypotenuse*** c^2 : $a^2 + b^2 = c^2$

Beweis:



Die Fläche des großen äußeren Quadrats beträgt: $(a+b)^2$.
Diese Fläche setzt sich zusammen aus dem vierfachen der Fläche des markierten Dreiecks und c^2.

Da die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks $\frac{ab}{2}$ beträgt, folgt:

$(a+b)^2 = \frac{4ab}{2} + c^2$ und somit

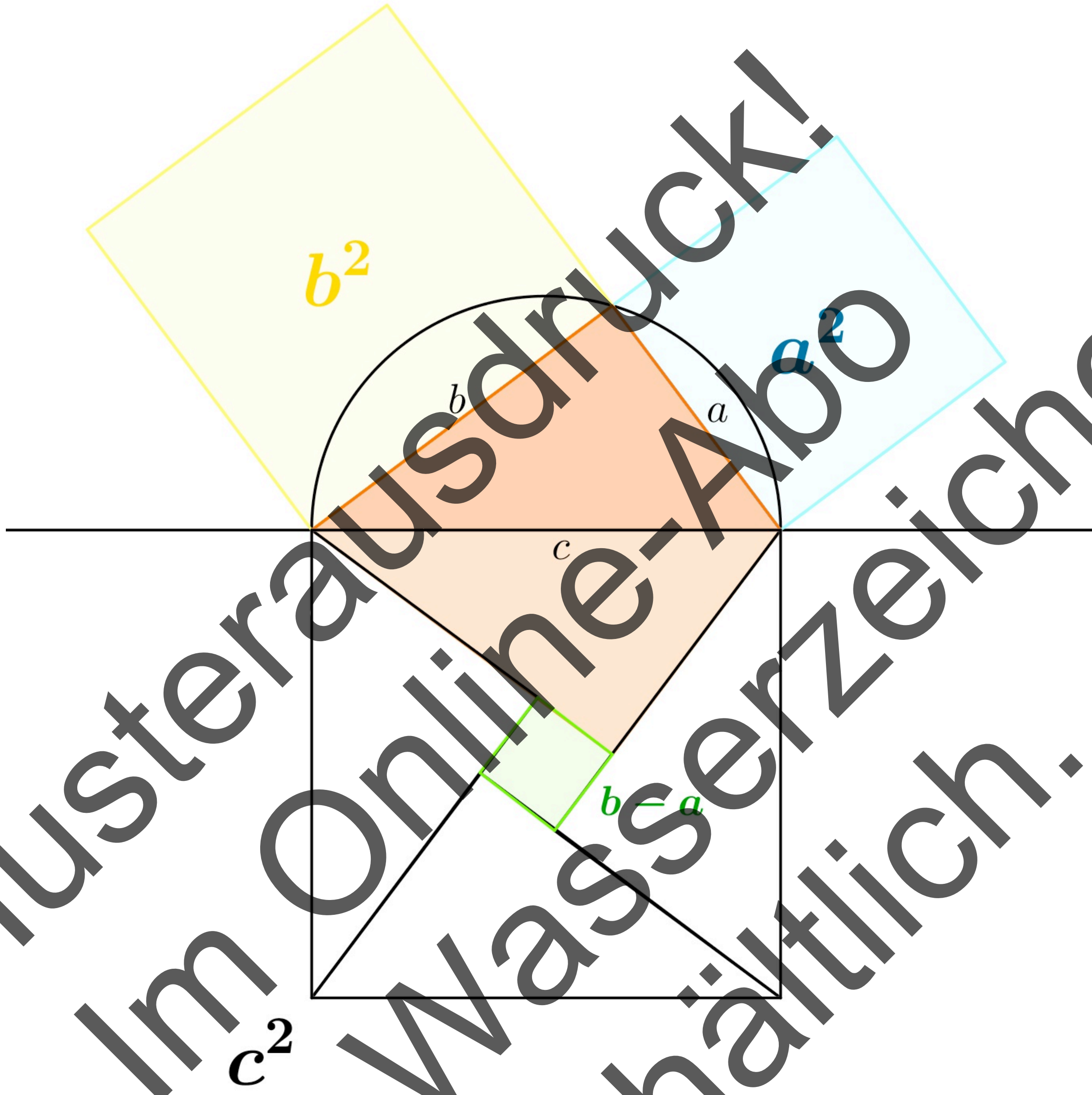
$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$ mit der ersten binomischen Formel und Kürzen mit 2

Nach Abziehen von $2ab$ auf beiden Seiten ergibt sich der Satz des Pythagoras:

$a^2 + b^2 = c^2$

Oder z.B alternativ:

Anstelle eines großen äußeren Quadrats kann man auch ein kleines inneres Quadrat bilden:



Wir betrachten das untere, von der Hypotenuse c gebildete Quadrat. Die Fläche setzt sich zusammen aus 4 mal der Fläche des Dreiecks a,b,c: $4\frac{ab}{2}$ und der Fläche des kleinen, inneren (grünen) Quadrats: $(b-a)^2$.

Es ergibt sich: $c^2 = 4\frac{ab}{2} + (b-a)^2$

$= 2ab + b^2 - 2ab + a^2$ nach der 2. binomischen Formel und Kürzen mit 2

$= a^2 + b^2$ wegen $2ab - 2ab = 0$

und somit: $a^2 + b^2 = c^2$

Aufgaben zum Satz des Pythagoras mit Musterlösungen

a,b,c sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a,b und der Hypotenuse c.

1. Aufgabe: Berechne die fehlende Seite:

$a = 9,\ b = 3,\ c = ?$

Lösung:

Es gilt $a^2 + b^2 = c^2$ und somit $9^2 + 3^2 = c^2$.

Quadrieren ergibt $81 + 9 = c^2$ und somit $90 = c^2$.

Wurzelziehen ergibt dann $c = \sqrt{90} = \sqrt{9 \cdot 10} = 3 \cdot \sqrt{10}$

$c = 4,\ b = 2,\ c = ?$

Lösung:

Es gilt $a^2 + b^2 = c^2$ und somit $a^2 + 2^2 = 4^2$.

Quadrieren ergibt $a^2 + 4 = 16$ und somit $a^2 = 12$.

Wurzelziehen ergibt dann $a = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{3}$

2. Aufgabe

Ein quadratisches Schild mit einer Seitenlänge von 125 cm wird an zwei gegenüberliegenden Ecken befestigt. Wie weit liegen die Ecken voneinander entfernt?

Lösung:

Gesucht wird die Hypotenuse.

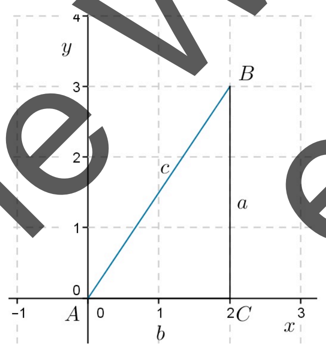
Die Katheten sind 125 cm lang. Es gilt $a^2 + b^2 = c^2$ und somit $2a^2 = c^2$ wegen $a = b$.

Es folgt $c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = 125\sqrt{2} \approx 176{,}777$ cm

3. Aufgabe

Wie weit ist der Punkt (2,3) vom Ursprung des Koordinatensystems entfernt ?

Lösung:



Gesucht ist die Hypotenuse.

Es gilt $a^2 + b^2 = c^2$ und somit $3^2 + 2^2 = c^2$.

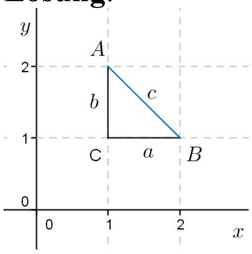
Quadrieren ergibt $9 + 4 = 13 = c^2$ und somit folgt $c = \sqrt{13} \approx 3{,}606$.

Der Abstand beträgt $\sqrt{13} \approx 3{,}606$

4. Aufgabe

Wie weit sind die Punkte A= (1,2) B= (2,1) voneinander entfernt?

Lösung:



Gesucht ist die Hypotenuse c.

Es gilt $b = y_A - y_B = 2 - 1 = 1$ und $a = x_B - x_A = 2 - 1 = 1$.

Wegen $a^2 + b^2 = c^2$ gilt $1^2 + 1^2 = c^2$ und somit $c^2 = 2$ und $c = \sqrt{2}$.

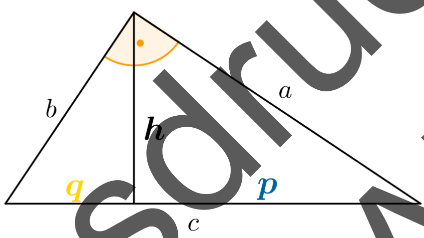
Die Entfernung der Punkte A= (1,2) B= (2,1) beträgt $\sqrt{2}$.

Der Kathetensatz des Euklid

Definition und Beweis

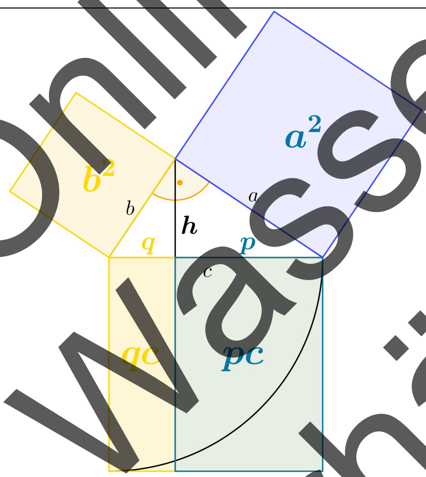
Die Voraussetzungen des Satzes sind:
Sei a,b,c ein rechtwinkliges Dreieck mit den beiden Katheten a,b , der Hypotenuse c und der Höhe h.

Der Punkt, den die Höhe h mit der Hypotenuse c gemeinsam hat, teilt dann c in die Abschnitte q, p .



Der **Kathetensatz** lautet:

Die Fläche des Quadrats über a ist gleich der Fläche des Rechtecks aus p und c **(** $a^2 = pc$ **)**
und
Die Fläche des Quadrats über b ist gleich der Fläche des Rechtecks aus q und c **(** $b^2 = qc$ **).**



Beweis (mit dem Satz des Pythagoras):

Es gilt dreimal der Pythagoras: I. $a^2 + b^2 = c^2$ II. $h^2 + p^2 = a^2$
III. $h^2 + q^2 = b^2$ (alles rechtwinklige Dreiecke)

Aus I folgt $a^2 = c^2 - b^2$ auf beiden Seiten b^2 subtrahiert
$= (p+q)^2 - (h^2 + q^2)$ wegen $p + q = c$ und III
$= p^2 + 2pq + q^2 - q^2 - h^2$ mit der 1. binomischer Formel
$= p^2 + 2pq - h^2$ wegen $q^2 - q^2 = 0$
$= p^2 + 2pq - (a^2 - p^2)$ wegen II
$= 2p^2 + 2pq - a^2$ Auflösung der Klammer

Es folgt: $2a^2 = 2p^2 + 2pq$ auf beiden Seiten a^2 addiert

$= 2p(p+q)$ $2p$ ausgeklammert

$= 2pc$ wegen $p+q=c$

Es folgt:	$a^2 = pc$ nach Division mit 2.	$b^2 = qc$ **folgt analog.**

Aufgaben zum Kathetensatz des Euklid mit Musterlösungen

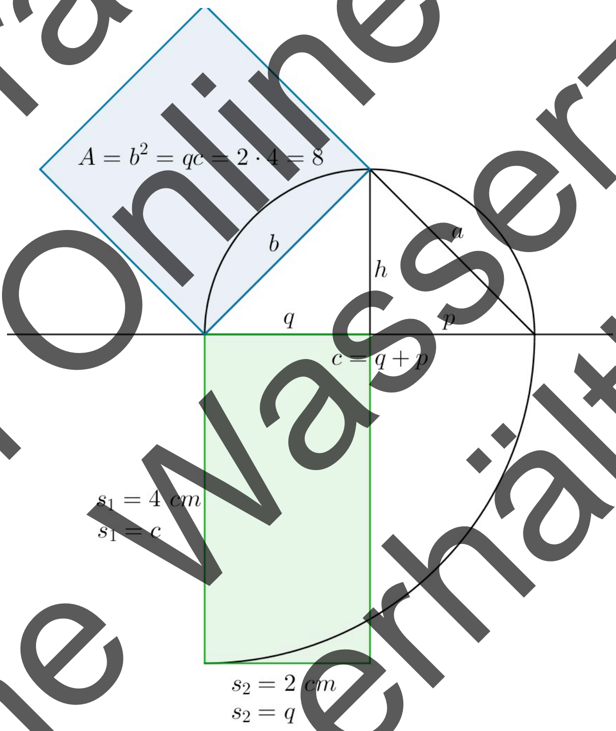
a,b,c sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a,b , der Hypotenuse c und der Höhe h.

1. Aufgabe

Gegeben sei ein Rechteck mit $s_1 = 4cm$ und $s_2 = 2cm$. Verwandele das Rechteck in ein flächengleiches Quadrat.

Lösung:

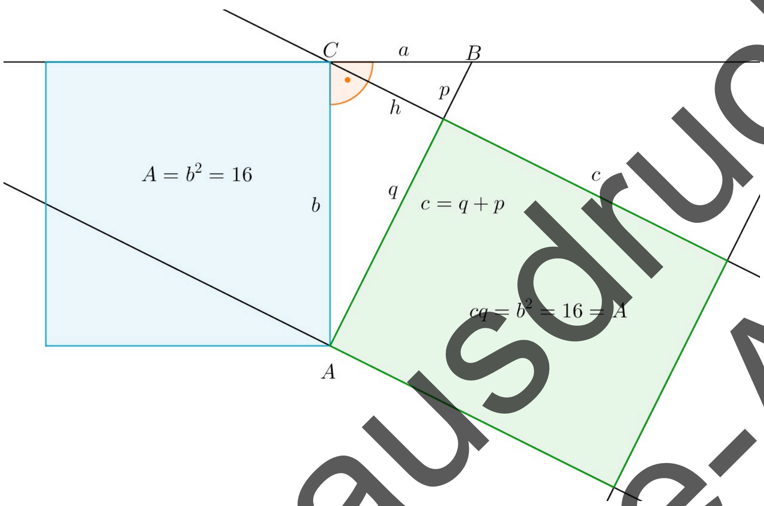
Setze $q = s_2 = 2cm$ und $c = s_1 = 4cm$ und konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Thales-Kreis:



2. Aufgabe

Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge $b = 4\,cm$. Verwandele das Quadrat in ein flächengleiches Rechteck.

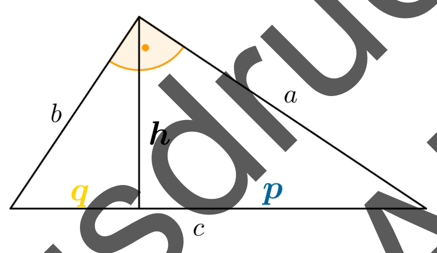
Lösung: Nehme die Seite b als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks A, B, C:



Der Höhensatz des Euklid

Definition und Beweis

Die Voraussetzungen des Satzes sind:
Sei a,b,c ein rechtwinkliges Dreieck mit den beiden Katheten a,b , der Hypotenuse c und der Höhe h.
Der Punkt, den die Höhe h mit der Hypotenuse c gemeinsam hat, teilt dann c in die Abschnitte q, p .



Der **Höhensatz** lautet:

Die Fläche des Quadrats über h ist gleich der Fläche des Rechtecks aus p und q ($h^2 = pq$ ***).***

Beweis (mit dem Satz des Pythagoras):

Es gilt dreimal der Pythagoras: I. $a^2 + b^2 = c^2$ II. $h^2 + p^2 = a^2$
III. $h^2 + q^2 = b^2$ (alles rechtwinklige Dreiecke)

Aus II folgt	$h^2 = a^2 - p^2$	auf beiden Seiten p^2 subtrahiert
Aus III folgt	$h^2 = b^2 - q^2$	auf beiden Seiten q^2 subtrahiert
Es folgt	$2h^2 = a^2 + b^2 - p^2 - q^2$	Addition beider Gleichungen
	$= c^2 - p^2 - q^2$	wegen I
	$= (p+q)^2 - p^2 - q^2$	wegen $p + q = c$
	$= p^2 + 2pq + q^2 - p^2 - q^2$	erste binomische Formel
	$= 2pq$	wegen $q^2 - q^2 = 0, p^2 - p^2 = 0$
Es folgt	$h^2 = pq$	beide Seiten durch 2 geteilt

Aufgaben zum Höhensatz des Euklid mit Musterlösungen

a,b,c sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a,b , der Hypotenuse c und der Höhe h.

1. Aufgabe

$a = 6\,cm, b = 25\,cm$ Bestimme c, h, p, q und die Fläche A

Lösung:

Nach dem Satz des Pythagoras gilt $a^2 + b^2 = c^2$ und somit $c = \sqrt{6^2 + 25^2} = \sqrt{661} \approx 25{,}71$.

Die Fläche A beträgt $A = \frac{ab}{2} = \frac{6 \cdot 25}{2} = 75\,cm^2$.

Mit der Fläche A bekommt man eine Beziehung für h: $A = \frac{ab}{2} = \frac{hq}{2} + \frac{hp}{2} = \frac{h(q+p)}{2} = \frac{hc}{2}$

und damit $h = \frac{2A}{c} = \frac{2 \cdot 75}{25{,}71} \approx 5{,}834$.

Fehlen noch p, q:

Mit Pythagoras $h^2 + q^2 = a^2$ und $h^2 + p^2 = b^2$.

Für p, q ergibt sich

$q = \sqrt{a^2 - h^2}$ und $p = \sqrt{b^2 - h^2}$ mit $q \approx \sqrt{36 - 5{,}834^2} \approx 1{,}401$ $p \approx \sqrt{625 - 5{,}834^2} \approx 24{,}31$.

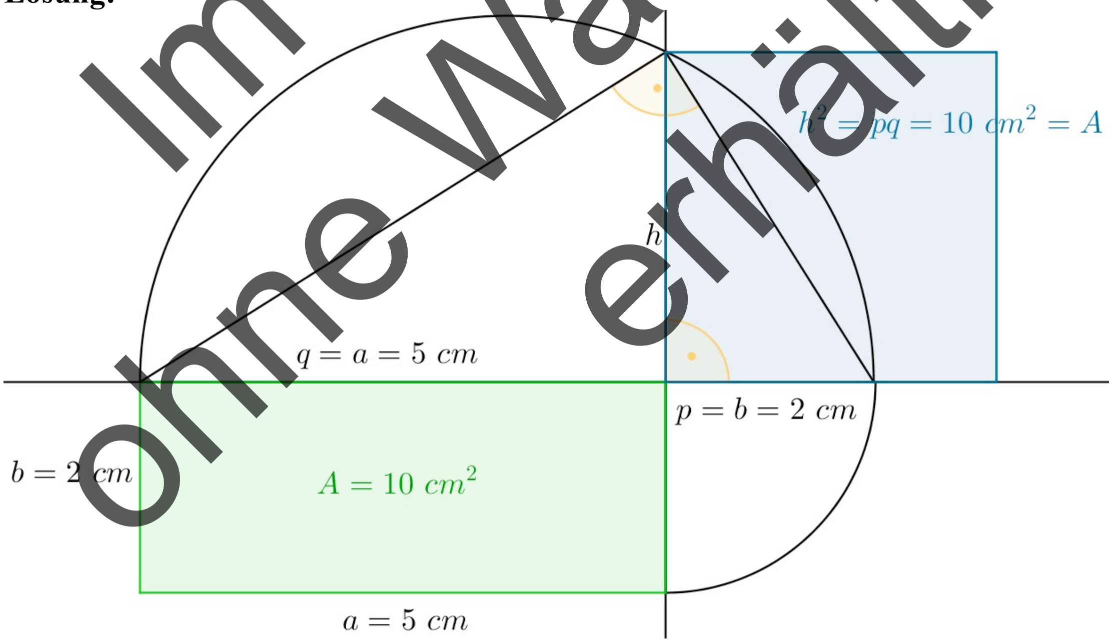
Probe: $c = p + q$ $25{,}71 \approx 24{,}31 + 1{,}402 = 25{,}712$ und $h^2 = pq$: $5{,}834^2 \approx 24{,}31 \cdot 1{,}402$

$34{,}036 \approx 34{,}083$

2. Aufgabe

Verwandle das Rechteck $a = 5\,cm, b = 2\,cm$ in ein flächengleiches Quadrat.

Lösung:



3. Aufgabe

In einem rechtwinkligen Dreieck a,b,c hat die Projektion der Kathete a auf die Hypotenuse $c\ \ 4\,cm$ Länge und die Höhe $h\ \ 5\,cm$. Berechne a,b,c, Fläche des Dreiecks.

Lösung:
Es gilt $p = 4$ wegen der Projektion.

Aus dem Höhensatz $h^2 = pq$ ergibt sich durch Umstellung $q = \frac{h^2}{p} = \frac{5^2}{4} = 6{,}25$.

Wegen $c = p + q$ ist $c = 4 + 6{,}25 = 10{,}25$.

Mit dem Satz des Pythagoras gilt $h^2 + p^2 = a^2 = 25 + 16 = 41$ und so $a = \sqrt{41} \approx 6{,}4$.

Nochmals der Pythagoras
$a^2 + b^2 = c^2$ ergibt $b^2 = c^2 - a^2 \approx 10{,}25^2 - 6{,}4^2 \approx 105{,}06 - 40{,}96 \approx 64{,}1$ und damit $b \approx 8$.

Die Fläche: $A = \frac{ab}{2} = \frac{6{,}4 \cdot 8}{2} \approx 25{,}6$.

Ergebnis: $a \approx 6{,}4; b \approx 8; c = 10{,}25\, in\, cm; A \approx 25{,}6\, cm^2$