

# Lineare Funktionen

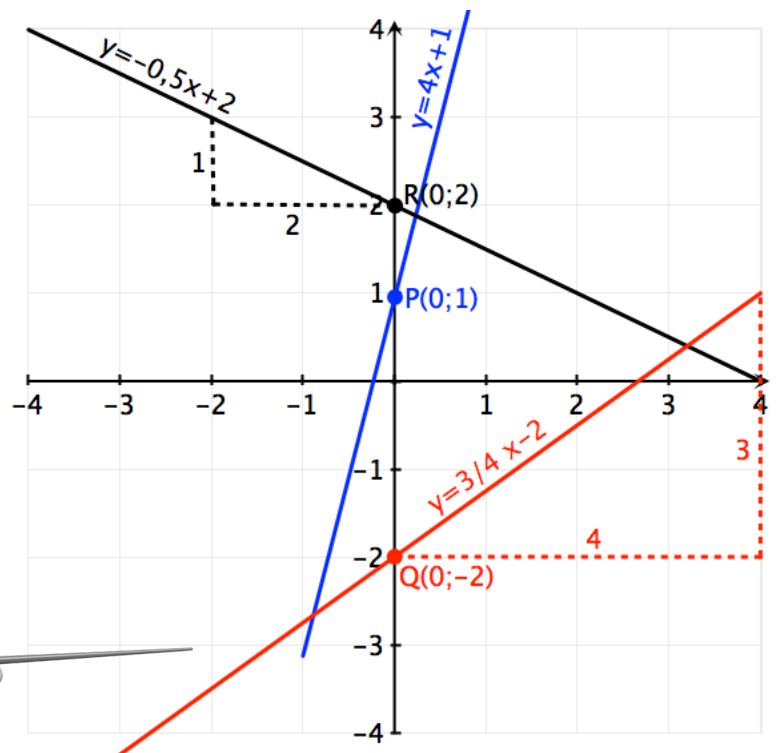
Skript

Beispiele

Musteraufgaben

Übungsaufgaben

Übungs-Klassenarbeiten



## **Impressum**

Mathefritz Verlag  
Jörg Christmann  
Pfaffenkopfstr. 21E  
66125 Saarbrücken

[verlag@mathefritz.de](mailto:verlag@mathefritz.de)  
[www.mathefritz.de](http://www.mathefritz.de)

## **Autoren**

Dr. Jürgen A. Schmidt  
Jörg Christmann

## **Nutzungsbedingungen**

Der Inhalt dieses Skripts wurde sorgfältig bearbeitet und überprüft. Der Mathefritz Verlag Jörg Christmann übernimmt jedoch keine Gewähr für die Fehlerfreiheit und Vollständigkeit der bereitgestellten Informationen.

Haftungsansprüche gegen den Mathefritz Verlag Jörg Christmann, die sich auf Schäden beziehen, welche durch die Nutzung der dargebotenen Informationen oder durch fehlerhafte oder unvollständige Informationen verursacht wurden, sind grundsätzlich ausgeschlossen, sofern seitens Mathefritz kein nachweislich vorsätzliches oder grob fahrlässiges Verschulden vorliegt und keine Ansprüche aus Verletzung des Lebens, des Körpers oder der Gesundheit betroffen sind.

Das Skript darf ausschließlich zu privaten Zwecken genutzt werden. Eine Nutzung in Weiterbildungseinrichtungen oder zur Nachhilfe ist untersagt.

Es gibt die Möglichkeit einer Firmen- oder Schullizenz!

Eine Weiterverbreitung und oder Veröffentlichung in elektronischen oder Print-Medien ist strengstens untersagt und ein Zuwiderhandeln wird juristisch verfolgt.

# Inhalt

1	Zuordnungen.....	4
1.1	Beispiele von Zuordnungen .....	4
1.2	Schaubilder.....	5
2	Gerade, Steigung, Steigungsfaktor .....	6
2.1	Steigung.....	6
3	Lineare Funktionen.....	7
3.1	Definition.....	7
3.2	Musteraufgabe .....	9
3.3	Weitere Musteraufgabe.....	10
4	Schnittpunkte von Geraden .....	10
4.1	Musteraufgabe .....	11
4.2	Weitere Beispiele .....	12
5	Geradendarstellung.....	12
5.1	Die Normalform.....	12
5.2	Die Punkt-Steigungsform .....	13
5.3	Die 2-Punkte-Form.....	13
6	Übungsaufgaben.....	15
7	Übungs-Klassenarbeiten.....	19
7.1	Leichte Klassenarbeit 1 (45 Minuten) .....	19
7.2	Klassenarbeit 2 (45 Minuten).....	21

# 1 Zuordnungen

## 1.1 Beispiele von Zuordnungen

### Beispiel 1:

Lars kauft beim Obsthändler Walnüsse. Ein Kilogramm kostet 4 €. Wie viel kosten 200 g, 500g, 1,2 kg?

### Beispiel 2:

In einem Parkhaus kostet das Parken pro angefangener halben Stunde jeweils 1 €. Ab 2 Stunden kostet die halbe Stunde nur noch 0,75 €. Länger als 4 Stunden Parken kostet pauschal 7,50 €. Berechne jeweils die Parkgebühr für 10 min, für 50 min, für 2h 20 min, für 6 h 15 min.

### Beispiel 3:

Zum Frühstück am Sonntag gibt es bei Meyers immer 4-min Frühstückseier. Wie lange dauert es, bis 2, 3, 5 Eier fertig gekocht sind?

### Merke:

In diesen Beispielen werden immer Werte einander zugeordnet:

- Der Menge der Walnüsse ist der Preis dafür zugeordnet.
- Der Parkdauer ist eine Parkgebühr zugeordnet.
- Den Eiern ist eine Zeitdauer zugeordnet.

Um solche Zuordnungen übersichtlicher darzustellen und um die Fragen in den Beispielen zu beantworten, gibt es verschiedene Möglichkeiten: Eine davon ist die **Wertetabelle**:

### Beispiel 1:

kg Walnüsse	1 kg = 1000g	<b>100 g</b>	200 g	500 g = 0,5 kg	1,2 kg = 1200 g
Preis in €	4 €	<b>0,40 €</b>	0,80 €	2,00 €	4,80 €

Um die gesuchten Preise für 200 g, 500 g und 1,2 kg einfach zu berechnen, ist es hilfreich, zuerst den Preis für eine kleine Menge zu notieren, hier z.B. für 100 g.

### Beispiel 2:

Parkdauer	0,5 h = 30 min	10 min	50 min	2h 20min	6h 15min
Parkgebühr	1 €	1 €	1€+1€ = 2 €	4 x 1€ + 0,75€ = 4,75 €	7,50 €

Um die Parkgebühren zu berechnen ist zu beachten, dass sie sich nicht gleichmäßig verändern, sondern „springen“.

### Beispiel 3:

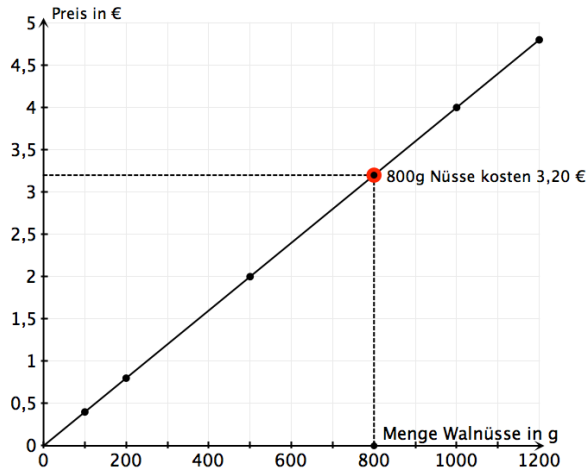
Anzahl Eier	1 Ei	2 Eier	3 Eier	5 Eier	10 Eier
Kochzeit in min	4 min	4 min	4 min	4 min	4 min

Alle Eier werden gleichzeitig fertig.

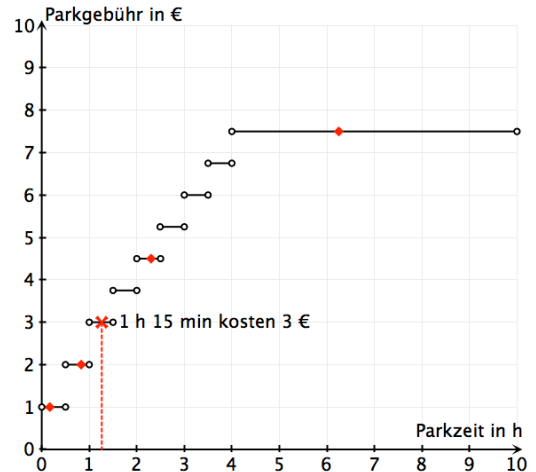
## 1.2 Schaubilder

Die Zuordnungen kann man auch grafisch in einem **Schaubild** darstellen. Dazu werden die Werte in einem Koordinatensystem eingezeichnet. Man kann dann auch weitere Werte ablesen.

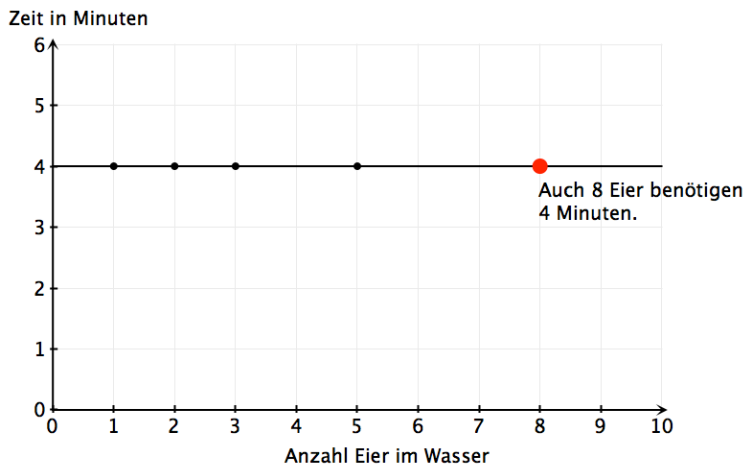
### Beispiel 1 - Walnüsse: Was kosten 800 g?



### Beispiel 2 - Parkgebühren: Wie hoch ist die Parkgebühr für 1h 15 min?



### Beispiel 3 - Eier: Auch 8 Eier benötigen genau 4 Minuten.



Man nennt solche Zuordnungen auch **Funktionen**. Bei Funktionen ist einem bestimmten x-Wert (z.B. x kg) genau ein y-Wert (z.B. y €) zugeordnet. Im **Schaubild** werden Funktionen durch entsprechende Linien dargestellt. Diese nennt man **Graph** der Funktion.

## 2 Gerade, Steigung, Steigungsfaktor

### 2.1 Steigung

Im Beispiel mit den Walnüssen erkennt man: Wenn doppelt so viele Nüsse ( $2 \cdot x \text{ kg}$ ) gekauft werden, dann kosten sie doppelt so viel ( $2 \cdot y \text{ €}$ ). Eine solche Funktion nennt man **proportionale Funktion**. Sie wird im Schaubild durch eine **Gerade** dargestellt, die durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft. Diese Gerade kann man mit der **Gleichung:  $y = a \cdot x$**  beschreiben. Dabei heißt **a** der **Steigungsfaktor**.

Er wird durch Umformung der Gleichung berechnet:  $a = \frac{y}{x}$ .

Der Steigungsfaktor ist das Maß für die **Steigung der Geraden** im Schaubild.

#### **Beispiel:**

Im Beispiel 1 (Nüsse) entnimmt man der Wertetafel z.B.  $x = 1000 \text{ (g)}$  und  $y = 4 \text{ (€)}$ .

Es ergibt sich:  $a = \frac{y}{x} = \frac{4}{1000} = \frac{1}{250} = 0,004$ .

Also gilt die Gleichung:  $y = 0,004 \cdot x$ .

Rechenbeispiel: Was kosten 600 g?

$$y = 0,004 \cdot 600 = 2,4$$

Antwortsatz: Die Nüsse kosten 2,40 €.

#### **Merke:**

Zur Bestimmung der Geradengleichung einer proportionalen Funktion kann man den Steigungsfaktor mit zugeordneten Werten aus der Wertetafel berechnen.

Im Gebirge findet man oft Verkehrsschilder mit Angaben zur Steigung oder dem Gefälle der Straße. Dabei bedeutet z.B. 10%, dass eine Straße um 10 m steigt bei 100 m horizontaler Strecke.



#### **Merke:**

Im Schaubild einer proportionalen Funktion kann man den Steigungsfaktor mit dem **Steigungsdreieck** bestimmen.

#### **Beispiele:**

Die Steigung einer Straße beträgt 10%.

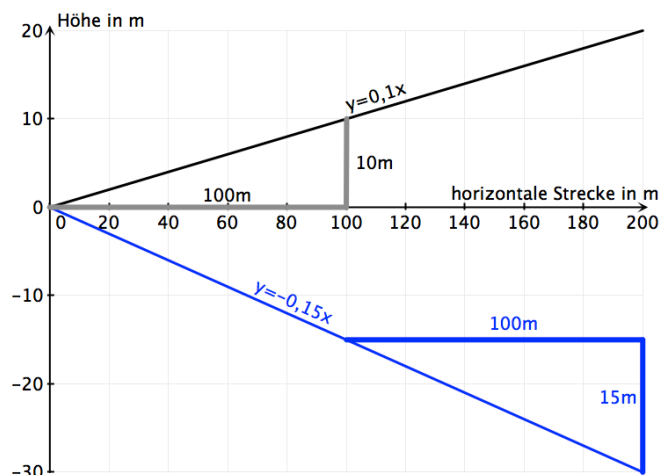
Dann ist  $a = \frac{10}{100} = 0,1$  und die

Geradengleichung lautet:  $y = 0,1 \cdot x$ .

Das Gefälle einer Straße ist 15%.

Also geht es um 15 m bergab, wenn man horizontal 100 Meter zurücklegt. Somit ist der y-Wert negativ: - 15.

Also ist  $a = -\frac{15}{100} = -0,15$  und die Gleichung lautet:  $y = -0,15 \cdot x$ .



Kennt man die Geradengleichung, so kann man das Schaubild der Geraden mit Hilfe eines Steigungsdreiecks zeichnen.

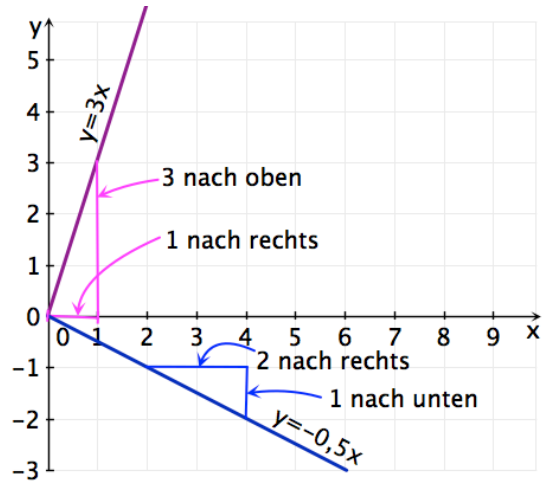
**Beispiele:**

$y = -\frac{1}{2}x:$

Gehe 2 nach rechts und 1 nach unten.  
Die Gerade geht durch die Punkte (0;0) und (2;-1).

$y = 3x:$

Gehe 1 nach rechts und 3 nach oben zum Punkt (1;3).



### 3 Lineare Funktionen

#### 3.1 Definition

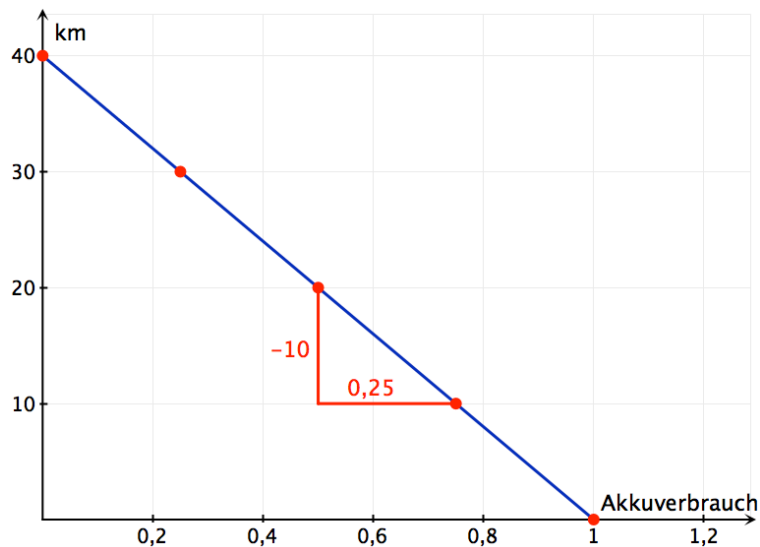
Mit ihrem Elektrofahrrad kann Nicoletta 40 km weit mit einer Akkuladung fahren. Wenn sie schön gleichmäßig fährt, dann hat sie nach 10 km ein Viertel der Akkuladung verbraucht, also noch für 30 km "Saft".

Um das Schaubild dazu zu zeichnen wird zunächst eine Wertetabelle erstellt:

x Akkuverbrauch	0	1/4	1/2	3/4	1
y mögliche Entfernung	40 km	30 km	20 km	10 km	0 km

Die Punkte liegen alle auf einer Geraden.

Die Steigung ergibt sich mit dem Steigungsdreieck:  $-\frac{10}{0,25} = -40$ .



Die Gerade geht nicht durch den Ursprung des Koordinatensystems, sondern ist nach oben um 40 verschoben. Damit ergibt sich als Geradengleichung:  $y = -40x + 40$ .

**Eine Funktion mit einer Geradengleichung der Form:  $f(x) = a \cdot x + b$  heißt lineare Funktion.**

Man schreibt auch:

Die Funktion  $f(x): x \mapsto a \cdot x + b$  heißt **lineare Funktion** mit  $a, b, x \in \mathbb{R}$

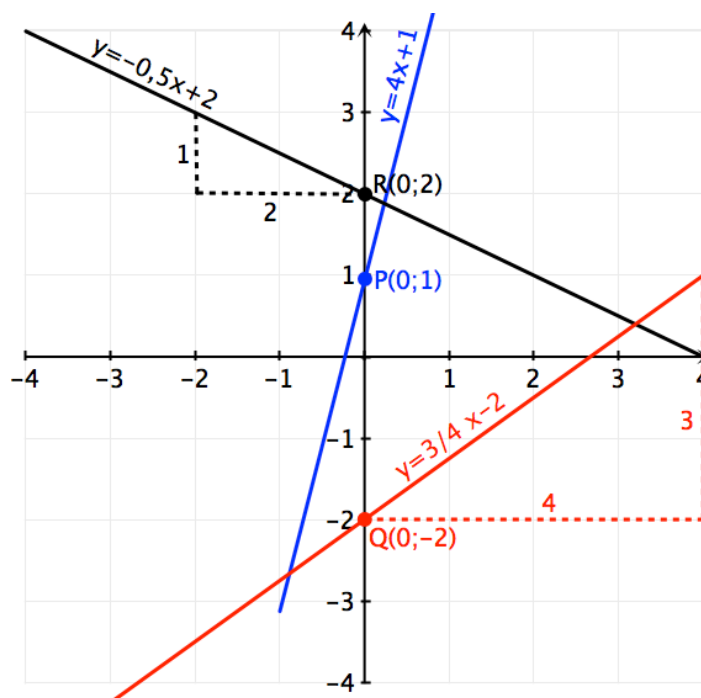
Jede lineare Funktion hat eine Gerade als Graph mit der Steigung  $a$  und dem y-Achsenabschnitt  $b$ . Zur linearen Funktion  $f(x)$  gehört die Funktionsgleichung  $f(x) = a \cdot x + b$  oder auch  $y = a \cdot x + b$ .

### Beispiele:

Die Funktion  $f(x): x \mapsto 4x + 1$  hat die Funktionsgleichung  $f(x) = 4x + 1$  mit der Steigung 4 und dem y-Achsenabschnitt 1. Sie schneidet die y-Achse im Punkt  $P(0;1)$ .

Die Funktion  $f(x): x \mapsto \frac{3}{4}x - 2$  hat die Funktionsgleichung  $f(x) = \frac{3}{4}x - 2$  mit der Steigung 0,75 ( $=3/4$ ) und dem y-Achsenabschnitt -2. Sie schneidet die y-Achse im Punkt  $Q(0; -2)$ .

Die Funktion  $f(x): x \mapsto -0,5x + 2$  hat die Funktionsgleichung  $f(x) = -0,5x + 2$  mit der Steigung -0,5 und dem y-Achsenabschnitt 2. Sie schneidet die y-Achse im Punkt  $R(0; 2)$ .





### 3.2 Musteraufgabe

#### Teil 1:

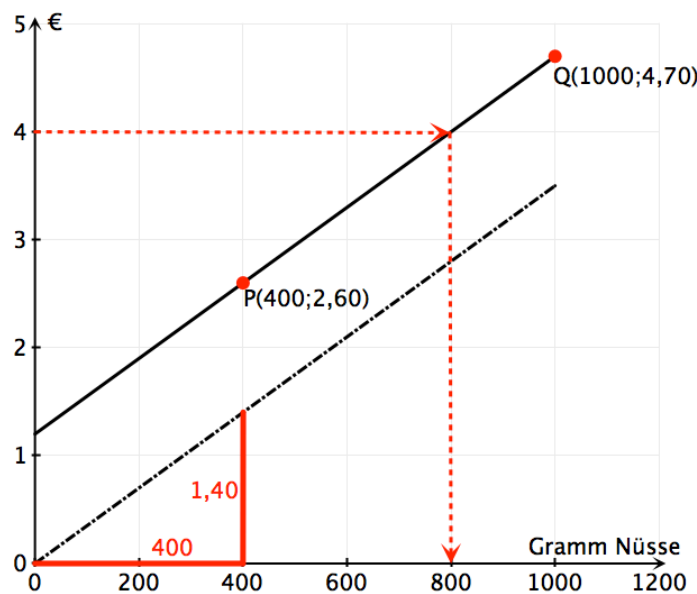
Lars kauft schon wieder Walnüsse, 1 kg kosten nun 3,50 €. Er kauft jetzt 400 g und noch eine Tafel Schokolade für 1,20 € und bezahlt insgesamt 2,60 €.

Zeichne den Graph der Funktion Gewicht  $x \rightarrow$  Preis  $y$  und stelle die Funktionsgleichung auf.

#### Lösung:

Der Kauf von Nüssen ist eine lineare Funktion, der Graph also eine Gerade. Um diese zu zeichnen genügen 2 Punkte.

Wir wissen: 400 g und Schokolade kosten 2,60 €. Ein "Punkt" ist also  $P(400; 2,60)$ . Würde Lars 1 kg Nüsse und eine Schokolade kaufen, müsste er 4,70 € bezahlen. Also ist der 2. Punkt  $Q(1000; 4,70)$ .



Mit Hilfe des Steigungsdreiecks in der parallelen Gerade durch den Nullpunkt ergibt sich als Steigung  $a = \frac{1,4}{400} = 0,035$  und als  $y$ -Abschnitt  $b = 1,20$ .

Somit lautet die Funktionsgleichung  $y = 0,035x + 1,2$ .

#### Teil 2:

Lars hat 4 € in der Tasche, kauft die Schokolade und für den Rest noch Nüsse. Wie viel g Nüsse bekommt er?

#### Lösung:

Ablesen in der Grafik ergibt 800 g. Mit der umgeformten Funktionsgleichung  $x = \frac{(y-b)}{a}$  ergibt sich  $\frac{(4-1,2)}{0,035} = 800$ . Lars erhält also 800 Gramm Nüsse dazu.

#### Merke:

Mit 2 Punkten lässt sich eine Gerade im Koordinatensystem zeichnen. Mit Hilfe eines Steigungsdreiecks wird die Steigung  $a$  berechnet. Der  $y$ -Abschnitt  $b$  kann am Schnittpunkt der Geraden mit der  $y$ -Achse abgelesen werden. Damit ergibt sich die Funktionsgleichung  $y = a \cdot x + b$ .

### 3.3 Weitere Musteraufgabe

Amelie fährt mit ihrem Fahrrad die 6 km von der Schule nach Hause mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 15 km/h. Wie lange braucht sie dafür? Nach 9 min fängt es an zu regnen. Wie weit ist es noch nach Hause?

#### Lösung:

Gesucht ist der Graph der linearen Funktion  $x$  (km)  $\rightarrow$   $y$  (h). Wir kennen einen "Punkt" P, da sie in 1 h 15 km fahren kann, also  $P(15; 1)$ . Der zweite Punkt hat 6 (km) als  $x$ -Wert. Für diese 6 km benötigt sie  $y = 6 \text{ km} : (15 \text{ km/h}) = 0,4 \text{ h}$ .

Somit ist  $Q(6; 0,4)$  ein Punkt auf der Geraden.

Wir stellen fest, dass die Gerade durch den Nullpunkt geht. Also ist die Funktion proportional, und die Steigung kann direkt abgelesen werden:

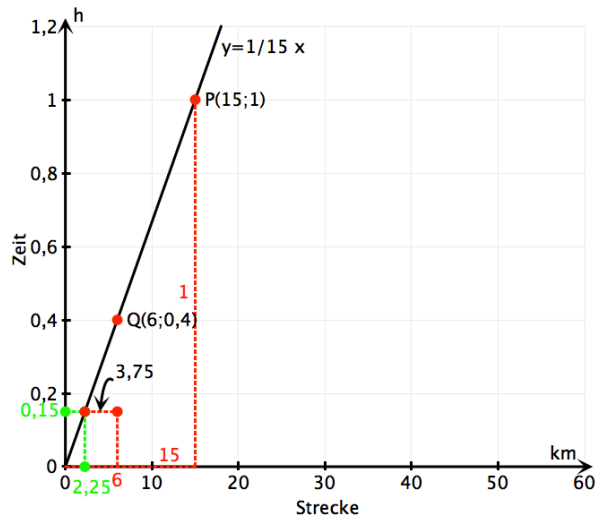
$a = \frac{1}{15}$ . Die Funktionsgleichung ist  $y = \frac{1}{15} x$ .

Um den restlichen Weg nach Hause zu berechnen, werden Zeitangaben entweder in Stunden oder in Minuten benötigt. Wir nehmen Stunden:

$9 \text{ min} = \frac{9}{60} \text{ h} = 0,15 \text{ h}$ .

Nach 0,15 h muss Amelie also noch weitere  $y = 0,4 \text{ h} - 0,15 \text{ h} = 0,25 \text{ h}$  fahren.

Es ist  $x = \frac{y}{a} = \frac{0,25}{(\frac{1}{15})} = 3,75$ .



Antwortsatz: Sie muss noch 3,75 km im Regen radeln.

### 4 Schnittpunkte von Geraden

Im unten stehenden Koordinatensystem schneiden sich 2 Geraden im Punkt P. In diesem Schaubild kann man das leicht ablesen. Der Schnittpunkt ist  $P(8;5)$ .

