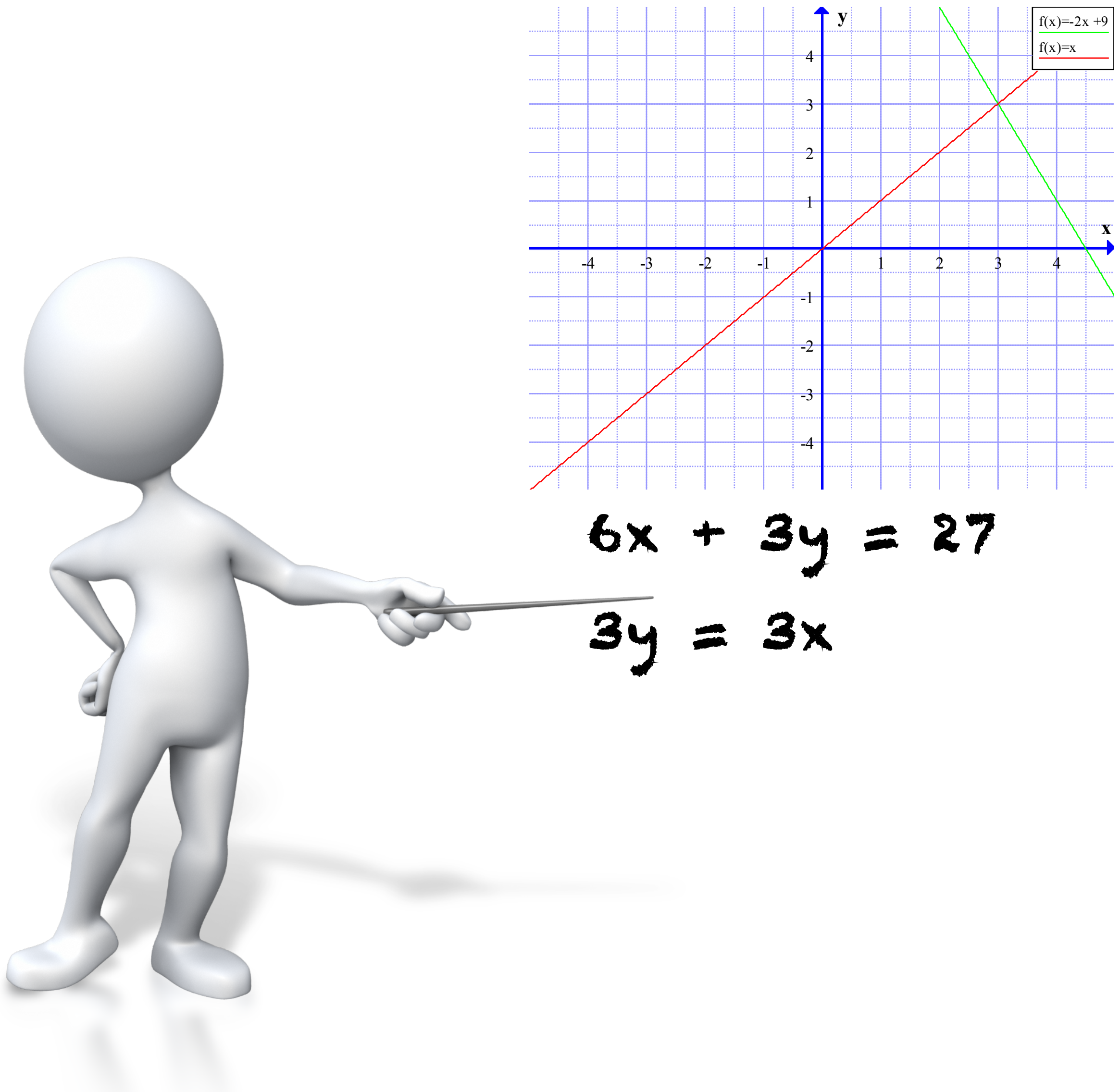
Lineare Gleichungssysteme

Skript
Beispiele
Musteraufgaben



Impressum

Mathefritz Verlag
Jörg Christmann
Pfaffenkopfstr. 21E
66125 Saarbrücken

verlag@mathefritz.de
www.mathefritz.de
www.mathestunde.com

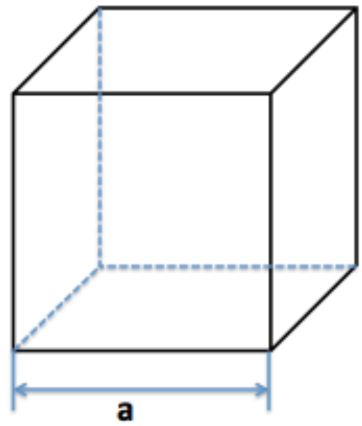
Autoren
Dr. Jürgen A. Schmidt
Jörg Christmann

Nutzungsbedingungen

Inhalt

1 Lineare Gleichungen

1.1 Einstieg



Ein Würfel hat 12 gleichlange Kanten und 6 gleichgroße Quadrate. Bezeichnet man eine Kantenlänge mit a, dann ist die Gesamtlänge L der Kanten L = 12 a und die Gesamtoberflache O des Würfels $O = 6\ a^2$.
Das Volumen V des Würfels ist $V = a^3$.
Beispiel: für a = 3 cm ergibt sich L = 36 cm, O = 45 cm^2 und V = 27 cm^3.
Die Rechenausdrücke 12 a, 6 a^2 und a^3 sind Beispiele für **Terme**. Terme enthalten neben Zahlen **Variablen** (man nennt diese auch „Unbekannte"), die durch Zahlen ersetzt werden können, um den Wert des Terms zu berechnen. Kennt man diesen Wert, so erhält man eine **Gleichung**, z.B. 12 a = 36, mit der sich a bestimmen lässt.

Eine Gleichung besteht aus 2 Termen, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden (gleichgesetzt) sind. Beispiele: 3x = 5; 2a + 3b = 12; 5 y = 10 x, y = 3x +2, $a^3 = 8$

1.2 Beispielaufgabe 1

Nils macht in 50 min seine Hausaufgaben für Deutsch und Mathe, für Mathe braucht er 15 min. Wie lange braucht er für Deutsch?
Lösung: Wir setzten x für die gesuchte Deutsch-Zeit. Zusammen mit Mathe ergibt dies die 50 min. Also ist x + 15 = 50 und damit x = 35.
Antwort: Deutsch macht er in 35 min.

Eine Gleichung der Form ax + b = 0 mit $a, b, x \in \mathbb{R}$ heißt **Lineare Gleichung mit einer Variablen (Unbekannten).** Beispiel von Nils: x – 35 = 0, dabei ist a =1 und b = -35.

1.3 Beispielaufgabe 2

Amelie hat 3 € für die Mittagspause. Sie möchte ein Käsesandwich und Salat essen. Das Brötchen kostet 30 Cent, 100 g Edamerkäse 1,20 € und 100 g Salat 1,60 €. Wie viel Gramm Käse erhält sie jeweils auf das Brötchen, wenn sie unterschiedlich viel Salat nimmt?

Lösung:

Wir setzen x für den Preis des Käses und y für den Preis des Salats in Cent. Dann ist $x + y + 30 = 300$. Wenn sie 150 g Salat nimmt, dann kostet das 240 Cent, und für Käse sind noch $300-240-30 = 30$ Cent übrig. Sie erhält dafür $30/120 = 25$ g Käse. Bei 75 g Salat für 120 Cent erhielte sie für 150 Cent Käse, das wären 125 g! Das ist viel zu viel für 1 Brötchen!

Eine Gleichung der Form $ax + by + c = 0$ mit $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$ heißt

Lineare Gleichung mit zwei Variablen (Unbekannten).

Beispiel von Amelie: $x + y - 270 = 0$ mit $a = 1$, $b = 1$ und $c = -270$.

2 Gleichungen lösen

Um Gleichungen zu lösen ist es oft nötig, sie zuerst zu vereinfachen. Erst werden

- gleiche Terme zusammengefasst und dann
- Terme oder Zahlen auf beiden Seiten addiert oder subtrahiert, oder
- beide Seiten mit demselben Term oder derselben Zahl (≠ 0) multipliziert oder dividiert.

2.1 Beispiele

- Zahl addieren: x - 4 = 16 | 4 addieren, also +4

  x – 4 + 4 = 16 + 4

  x = 20

- Terme zusammenfassen und subtrahieren:

  19 y + 16 – y + 8 = 6 y | 19 y – y und 16 + 8 zusammenfassen

  18 y + 24 = 6 y | 6 y subtrahieren, also - 6 y

  12 y + 24 = 6 y – 6 y = 0 | - 24

  2 y +24 – 24 = 0 – 24

  12 y = - 24

- durch Zahl dividieren: 12 y = - 24 | durch 12 teilen, also :12

  $y = -\frac{24}{12} = -2$

- mit Term multiplizieren: $\frac{1}{2a} = 5$ | mit 2 a multiplizieren

  $1 \cdot \frac{2a}{2a} = 5 \cdot 2a$

  $1 = 10a$ | : 10

  $a = \frac{1}{10}$

Bei folgendem Beispiel muss man auch auf die **Klammerregeln** achten:

Löse die Gleichung 4 · (5x – 10) + 50 = 15 x – (100 – 6x) | ausklammern

4 · 5x – 4 · 10 + 50 = 15 x – 100 – (- 6x) | ausklammern

20 x – 40 + 50 = 15 x - 100 + 6x | zusammenfassen

20 x + 10 = 21 x – 100 | – 21 x – 10

20 x – 21 x + 10 - 10 = 21 x – 21 x – 100 + 10 | zusammenfassen

- x = - 90 | · (-1)

x = 90

2.2 Beispielaufgabe

Sören macht in 50 min seine Hausaufgaben, für Mathe braucht er halb so viel Zeit wie für Englisch; dazwischen macht er 5 min Pause. Wie lange braucht er für Englisch?

Lösung:

Wir setzten x für die gesuchte Englisch-Zeit. Dann ist $\frac{1}{2}x$ die Zeit für Mathe. Zusammen mit der Pause ergibt dies die 50 min.

Also ist $x + \frac{1}{2}x + 5 = 50$ | x zusammenfassen

$\frac{3}{2}x + 5 = 50$ | – 5

$\frac{3}{2}x = 45$ | : $\frac{3}{2}$ (durch Bruch teilen = mit Kehrbruch

$x = 45 \cdot \frac{2}{3} = \frac{90}{3} = 30$

Antwort: Englisch macht er in 30 min.

3 Lineare Gleichungen mit 2 Variablen

3.1 Einstiegsaufgabe

Nico und sein Bruder Emilio sind zusammen 28 Jahre alt. Wie alt sind sie?

Diese Frage kann man nicht eindeutig beantworten, denn wenn zum Beispiel Nico 19 Jahre alt ist, dann muss Emilio 9 sein. Oder Nico ist 14, dann ist Emilio sein Zwillingsbruder. Es gibt also mehrere Lösungen!

Alle diese Lösungen kann man mit einer Gleichung mit 2 Variablen erhalten. Dazu setzen wir x für das Alter von Nico und y für das von Emilio.

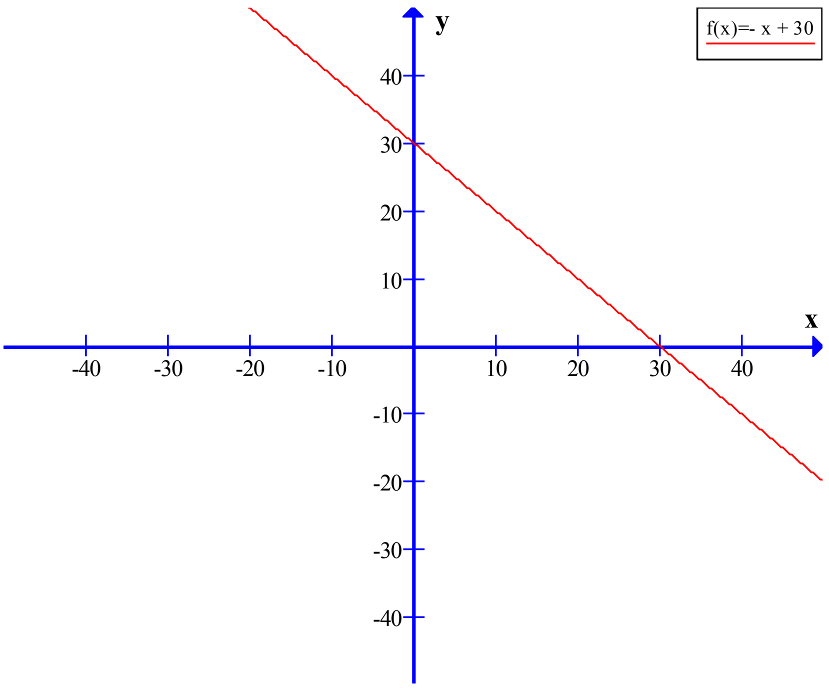
Dann gilt die Gleichung: $x + y = 28$.

Durch Umformen erhält man die Gleichung $y = -x + 28$.

Einsetzen von Werten für x ergeben Werte für y:

x (Nico)	19	14	10	8	5	1
y (Emilio)	-19+28=9	14	18	20	23	27

Die Gleichung $y = -x + 30$ ist die Funktionsgleichung der linearen Funktion $f: x \rightarrow -x + 30$. Wie jede Funktionsgleichung lässt sie sich als Gerade im Koordinatensystem darstellen. Sie hat also unendlich viele Lösungen.



Merke:

Die lineare Gleichung mit 2 Variablen ax + by + c = 0 mit a, b, c, x, y ϵ ℝ lässt sich zur linearen Funktionsgleichung umformen:

y = m x + n mit m = $-\frac{a}{b}$ und n = $-\frac{c}{b}$.

Sie hat unendlich viele Lösungspaare (x; y) und kann als Gerade dargestellt werden.

Beispiel mit Nico und Emilio: a=1, b=1, c=-30, m=-1, n= -(-30) = +30

3.2 Beispielaufgabe

Gib die Lösungen der Gleichung 12 x + 4y – 6 = 0 an. Zeichne die Lösungsgerade.

Es gibt 2 Lösungswege für diese Aufgabe.

a) Lösung durch Umformen der Gleichung:

$12x + 4y - 6 = 0$ | – 12 x + 6

$4y = -12x + 6$ | : 4

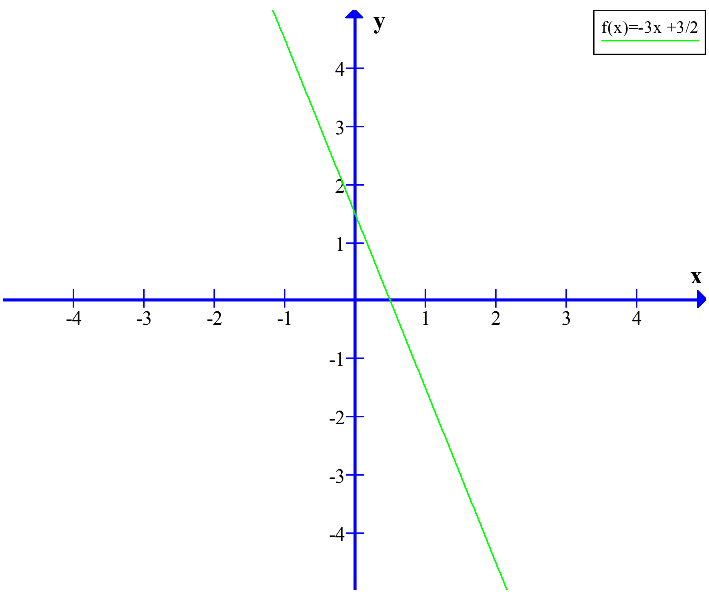
$y = -3x + \frac{3}{2}$

b) Lösung mittels m und n:

a = 12, b = 4, c = - 6, also ist m = $-\frac{12}{4} = -3$ und n =$-\left(-\frac{6}{4}\right) = \frac{3}{2}$.

Damit ergibt sich die Gleichung $y = -3x + \frac{3}{2}$.

Lösungsgerade:



4 Lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen: zeichnerische Lösung

4.1 Einstiegsaufgabe

Eine Privat-Disco ist angesagt! Petra lädt ihre Freunde ein, 5 Mädchen und 3 Jungs. Die Mädchen trinken zusammen doppelt so viel Cola wie die Jungs, aber essen gleich viele Donuts. Insgesamt werden 21 Cola verbraucht. Wie viele Cola trinkt durchschnittlich 1 Mädchen bzw. 1 Junge?

Lösung:

Wir setzen x für die Anzahl der von 1 Mädchen getrunkenen Cola und y entsprechend für 1 Junge.

Dann ist $6x + 3y = 27$.

Da die 3 Jungs halb so viel Cola trinken wie die Mädchen ist ebenso $3y = \frac{1}{2} \cdot 6x$.

Dies sind 2 lineare Gleichungen mit 2 Variablen. Wir können sie als Funktionsgleichungen schreiben und als Geraden in einem Koordinatensystem darstellen; dazu werden die Gleichungen zur besseren Übersicht nummeriert:

(I)	$6x + 3y = 27$	I – 6x
(II)	$3y = \frac{1}{2} \cdot 6x$	I : 3

(I)	$3y = 27 - 6x$	I : 3
(I)	$y = 9 - 2x$	
(II)	$y = x$