Potenzen

1. Aufgabe – Wiederholung und Einstieg

Zahlen, die multipliziert werden, nennt man Faktoren.

Das Ergebnis einer Multiplikation nennt man Produkt.

Was fällt dir bei den Produkten auf? Gibt es bei verschiedenen Produkten gemeinsame Merkmale? Formuliere die Antwort mit den Fachbegriffen!

7	•	5	=	3	5			5	•	5	•	5	=	1	2	5			6	•	6	=	3	6
2	•	2	=	4				3	•	5	=	1	5						6	•	2	=	1	2
8	•	5	=	4	0			3	•	3	•	3	=	2	7				7	•	7	=	4	9

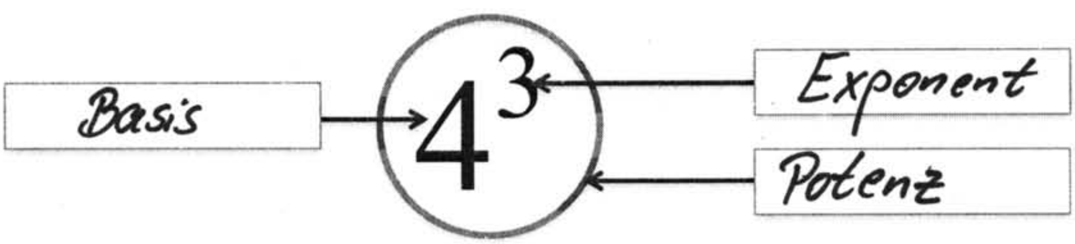
Die Zahlen 4, 27, 36, 49, 125 bestehen nur aus gleichen Faktoren.

Ein Produkt aus gleichen Faktoren kann man als **Potenz** schreiben:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$$

Eine **Potenz** besteht aus einer **Basis** und der **Hochzahl**, dem sogenannten **Exponenten**. Der **Exponent** gibt an, wie oft die **Basis** als **Faktor** geschrieben wird.

Trage die drei Begriffe korrekt ein:



2. Aufgabe – Schreibe als Potenz und rechne aus!

a

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{\boxed{3}} = 8$

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$

$4 \cdot 4 = 4^2 = 16$

$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$

$7 \cdot 7 = 7^2 = 49$

$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$

b

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1024$

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$

c

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^{\boxed{4}} \cdot 5^{\boxed{2}} = 16 \cdot 25 = 400$

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 3^3 \cdot 4^3 = 27 \cdot 64 = 1728$

$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^3 = 4 \cdot 125 = 500$

3. Aufgabe – Potenzen mit dem Exponent 0 und 1

a

			Sonderfälle
$2^1 = 2$	$5^1 = 5$	$20^1 = 20$	$1^1 = 1$
$3^1 = 3$	$8^1 = 8$	$100^1 = 100$	$0^1 = 0$
$4^1 = 4$	$10^1 = 10$	$2000^1 = 2000$	

Regel: Jede Zahl hoch 1 ist die Zahl selbst.

b

			Sonderfälle?
$2^0 = 1$	$5^0 = 1$	$50^0 = 1$	$1^0 = 1$
$3^0 = 1$	$7^0 = 1$	$200^0 = 1$	$0^0 =$ nicht definiert
$4^0 = 1$	$10^0 = 1$	$1000^0 = 1$	

Regel: Jede Zahl hoch 0 ist 1.
Ausnahme: 0^0 ist nicht definiert!

4. Aufgabe – Wichtige Potenzen zum Auswendiglernen!

a

$2^0 = 1$ $2^3 = 8$ $2^6 = 64$ $2^9 = 512$

$2^1 = 2$ $2^4 = 16$ $2^7 = 128$ $2^{10} = 1024$

$2^2 = 4$ $2^5 = 32$ $2^8 = 256$ $2^{11} = 2048$

Die Zweierpotenzen bis 2^{10} musst du auswendig können!

b

$3^2 = 9$ $4^2 = 16$ $5^2 = 25$ $6^2 = 36$

$3^3 = 27$ $4^3 = 64$ $5^3 = 125$ $6^3 = 216$

$3^4 = 81$ $4^4 = 256$ $5^4 = 625$

Einige weitere Potenzen solltest du auswendig können!

5. Aufgabe – Schreibe als Produkt und rechne aus!

a

$4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$ $12^2 = 12 \cdot 12 = 144$

$8^2 = 8 \cdot 8 = 64$ $5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 . 5 = 3125$

$9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ $20^3 = 20 \cdot 20 \cdot 20 = 8000$

b

$3 \cdot 2^5 = 3 \cdot 32 = 96$

$5^2 \cdot 4^2 \cdot 3 = 25 \cdot 16 \cdot 3 = 400 \cdot 3 = 1200$

$3^3 \cdot 6^2 \cdot 7 = 27 \cdot 36 \cdot 7 = 6804$

c

$4 \cdot 5^3 = 4 \cdot 125 = 500$

$5 \cdot 4^2 \cdot 3^0 = 5 \cdot 16 \cdot 1 = 80$

$9 \cdot 2^8 \cdot 7^1 = 9 \cdot 256 \cdot 7 = 2304 \cdot 7 = 16128$

6. Aufgabe – Die Zehnerpotenzen bis 10^{12}

		Zahl	Name
10^0	=	1	Eins
10^1	=	10	Zehn
10^2	=	100	Hundert
10^3	=	1000	Tausend
10^4	=	10000	Zehntausend
10^5	=	100000	Hunderttausend
10^6	=	1 000 000	1 Million
10^7	=	10 000 000	10 Millionen
10^8	=	100 000 000	100 Millionen
10^9	=	1 000 000 000	1 Milliarde
10^{10}	=	10 000 000 000	10 Milliarden
10^{11}	=	100 000 000 000	100 Milliarden
10^{12}	=	1 000 000 000 000	1 Billion

Diese Zehnerpotenzen und die Namen musst du dir merken!

1. Aufgabe – Ergänze Vorgänger – Zahl – Nachfolger!

Vorgänger	Zahl	Nachfolger
49598	49599	49600
110581	110582	110583
39998	39999	40000
20135	20136	20137

Vorgänger	Zahl	Nachfolger
89999	90000	90001
100200	100 201	100202
90111	90 112	90113
322998	322999	323000

2. Aufgabe – Ergänze die Nachbarzehner, -hunderter, -tausender, -zehntausender!

Nachbar**zehner**	Zahl	Nachbar**zehner**
550	551	560
890	895	900
440	443	450

Nachbar**hunderter**	Zahl	Nachbar**hunderter**
800	877	900
10900	10901	11000
4300	4388	4400

Nachbar-**tausender**	Zahl	Nachbar-**tausender**
2000	2111	3000
36000	36899	37000
56000	56317	57000

Nachbar-**zehntausender**	Zahl	Nachbar-**zehntausender**
30000	33991	40000
140000	143324	150000
90000	90111	100000

3. Aufgabe – Schreibe die folgenden Zahlen mit Ziffern in die Stellenwerttafel!

	HT Hundert-tausender	ZT Zehn-tausender	T Tausen-der	H Hunder-ter	Z Zehner	E Einer
Siebenhunderteinundzwanzig	–	–	–	7	2	1
Tausendsiebenundvierzig	–	–	1	0	4	7
Fünfundsiebzigtausenddreihundertneun	–	7	5	3	0	9
Vierhundertneunundachtzigtausendelf	4	8	9	0	1	1
Neunhundertfünfundfünfzigtausend-dreihunderteinundzwanzig	9	5	5	3	2	1
Zweihundertviertausend-siebenundvierzig	2	0	4	0	4	7

4. Aufgabe – Schreibe als Summe von Tausendern, Hundertern, Zehnern, Einern

1781	=	1 T + 7 H + 8 Z + 1 E
5096	=	5 T + 0 H + 9 Z + 6 E
124	=	1 H + 2 Z + 4 E
9901	=	9 T + 9 H + 0 Z + 1 E
270	=	2 H + 7 Z + 0 E
7400	=	7 T + 4 H + 0 Z + 0 E
8000	=	8 T + 0 H + 0 Z + 0 E
1001	=	1 T + 0 H + 0 Z + 1 E

5. Aufgabe – Schreibe die folgenden Zahlen als als Summe verschiedener Zehnerpotenzen!

Beispiel: $20 = 2 \cdot 10^1$, $120 = 100 + 20 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1$

645	=	$600 + 40 + 5 = 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$
1036	=	$1000 + 30 + 6 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$
108	=	$100 + 8 = 1 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^0$
8603	=	$8000 + 600 + 3 = 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^0$
5531	=	$5000 + 500 + 30 + 1 = 5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$
6300	=	$6000 + 300 = 6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2$
1000	=	$1000 = 1 \cdot 10^3$
2650	=	$2000 + 600 + 50 = 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1$

Unser Zehnersystem heißt deshalb Zehnersystem, weil die Ziffer an jeder Stelle für die Anzahl der entsprechenden Zehnerpotenzen steht.

Beispiel:

T	H	Z	E			T		H		Z		E
2	4	0	5		=	2000	+	400	+	0	+	5
					=	$2 \cdot 10^3$	+	$4 \cdot 10^2$	+	$0 \cdot 10^1$	+	$5 \cdot 10^0$

Ergänze mit den Wörtern: Potenzen, Stelle

6. **Ergänze die Zehnerpotenzen, den Wert und Namen, die zu den jeweiligen Stellen gehören!**

Kürzel		Zehnerpotenz		Wert	Name
E	=	10^0	=	1	Einer)
Z	=	10^1	=	10	Zehner)
H	=	10^2	=	100	Hundert
T	=	10^3	=	1000	Tausend(er)
ZT	=	10^4	=	10000	Zehntausend(er)
HT	=	10^5	=	100 000	Hunderttausend
M	=	10^6	=	1 000 000	Million

Schreibe die folgende Zahl in Worten und als Summe von Zehnerpotenzen: 21079

Einundzwanzigtausendneunundsiebzig

21079 = $2 \cdot 10^4$ + $1 \cdot 10^3$ + $0 \cdot 10^2$ + $7 \cdot 10^1$ + $9 \cdot 10^0$

7. Aufgabe – Schreibe die folgenden Zahlen als Zehnerpotenzsummen!

1075981	=	$1 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$
907	=	$9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^0$
3302	=	$3 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^0$
45098	=	$4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$
303405	=	$3 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^0$
4203888	=	$4 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$
1000224	=	$1 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$
29	=	$2 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$
7766	=	$7 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$

8. Aufgabe – Runde die folgenden Zahlen auf 1 Million genau und schreibe sie anschließend mit der entsprechenden Zehnerpotenz für die Million.

Beispiel: 4 000 000 = 4 Millionen = $4 \cdot 10^6$

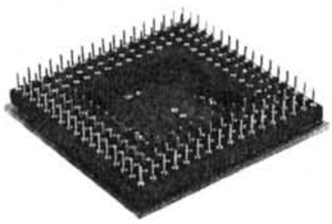
7457598	=	7 Millionen = $7 \cdot 10^6$
990907	=	1 Million = $1 \cdot 10^6$
2052770	=	2 Millionen = $2 \cdot 10^6$
6750245	=	7 Millionen = $7 \cdot 10^6$
80880100	=	81 Millionen = $81 \cdot 10^6$
1354555119	=	1355 Millionen = $1355 \cdot 10^6$
8220501011	=	8221 Millionen = $8220 \cdot 10^6$

So rechnen Computer

Speicher-Baustein (RAM)

Technische Geräte kennen nur zwei Zustände: es fließt ein Strom oder es fließt kein Strom.
Wie kann ein Computer nur mit diesen beiden Informationen so komplexe Dinge ausführen wie rechnen, Bilder darstellen usw.?

Prozessor (z.B. Pentium 1)



Wir nehmen an, der Zustand „kein Strom" bedeutet: 0
Für den Zustand „Strom" verwenden wir die Zahl: 1

Ein Speicherbaustein hat nun beliebig viele „Speicherstellen", in denen jeweils die Zahl „0" oder „1" gespeichert werden kann.

1. Stelle	2.Stelle	3.Stelle	4. Stelle	5.Stelle	6.Stelle	7. Stelle	8. Stelle
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
Kein Strom	Strom	Kein Strom	Strom	Kein Strom	Strom	Kein Strom	Strom

1. Aufgabe:

Wie viele Möglichkeiten (dies nennt man bei einem Speicherbaustein auch ***Zustände***) hat ein Speicher, der 3 bzw. 4 Speicherstellen hat?

Notiere alle möglichen Zustände (0 und 1):

1. Stelle	2. Stelle	3. Stelle			1. Stelle	2. Stelle	3. Stelle	4. Stelle
0	0	0			0	0	0	0
0	0	1			0	0	0	1
0	1	0			0	0	1	0
0	1	1			0	0	1	1
1	0	0			0	1	0	0
1	0	1			0	1	0	1
1	1	0			0	1	1	0
1	1	1			0	1	1	1
					1	0	0	0
					1	0	0	1
					1	0	1	0
					1	0	1	1
					1	1	0	0
					1	1	0	1
					1	1	1	0
					1	1	1	1

8 Möglichkeiten

$= 2^3 = 8$

16 Mögl. $2^4 = 16$

2. Aufgabe – Bits und Bytes

Eine einzige Speicherstelle, mit den Möglichkeiten „Strom“ oder „kein Strom“ nennt man **1 Bit.** 8 Bits zusammengefasst nennt man **1 Byte**. Dieser Begriff ist dir bestimmt aus der Welt der Computer schon begegnet.

Wie viele mögliche Zustände kann man in einem Byte speichern?

1 Byte :

1. Stelle	2. Stelle	3. Stelle	4. Stelle	5. Stelle	6. Stelle	7. Stelle	8. Stelle
2	2	2	2	2	2	2	2

Strom = 1
kein Strom = 0

Mit welcher Überlegung finden wir diese Lösung?

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$

3. Aufgabe – Zählen mit Bits und Bytes, Kilobytes und Megabytes

Zunächst notieren wir uns noch einmal die wichtigsten 2er Potenzen. Diese müssen wir auswendig können!

Zweierpotenzen

$2^0 = 1$	$2^6 = 64$
$2^1 = 2$	$2^7 = 128$
$2^2 = 4$	$2^8 = 256$
$2^3 = 8$	$2^9 = 512$
$2^4 = 16$	$2^{10} = 1024$
$2^5 = 32$	$2^{11} = 2048$

1 Kilobyte ist definiert als 2^{10} Bytes und nicht einfach 1000!
Wie viele Bytes sind nun 1 KByte?

1KB = 1024 Bytes

1 Megabyte ist nicht definiert als 1 Million Bytes,
sondern als 2^{10} Kilobytes!

1MB = 1024 KB = 1.048 576 Bytes

Beachte: Häufig ist die Speicherkapazität von Festplatten zwar in GByte angegeben, aber es wird in 1.000 Schritten gerechnet und nicht in 2^{10} also 1024!

D.h. 50 GB bedeutet dann 50.000.000.000 Bytes,

das sind jedoch nur 4,77 „echte" GBytes.

Lösung: 47,7 GB!

(Hinweis: Rechne 50.000.000 durch 1024 und noch mal durch 1024!)

4. Aufgabe - Was haben Bits und Bytes mit Zahlen zu tun?

Wir notieren nochmals alle Zustände für 4 Speicherstellen. Beachte die Reihenfolge, beginne mit 0 0 0 0 und Ende mit 1 1 1 1!

Jetzt ordnen wir jedem Zustand im „Computersystem" eine Zahl im Zehnersystem zu.

Das Computer-Zahlensystem nennen wir:

Zweiersystem

oder

Binärsystem

Zahl im Computersystem **Binärsystem**				Zahl im **Zehnersystem**
1. Stelle	2. Stelle	3. Stelle	4. Stelle	
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	2
0	0	1	1	3
0	1	0	0	4
0	1	0	1	5
0	1	1	0	6
0	1	1	1	7
1	0	0	0	8
1	0	0	1	9
1	0	1	0	10
1	0	1	1	11
1	1	0	0	12
1	1	0	1	13
1	1	1	0	14
1	1	1	1	15

5. Aufgabe – Wie wird eine Zahl im Binärsystem dargestellt?

Wir betrachten als Beispiel vom Anfang.
Sehr wichtig ist jetzt, dass wir die Stellen von Rechts nach Links zählen, so wie auch im Zehnersystem ganz rechts die Einer dann Zehner, Hunderter usw. stehen!

D.h. unser Beispiel lautet richtig:

8. Stelle	7.Stelle	6.Stelle	5. Stelle	4.Stelle	3.Stelle	2. Stelle	1. Stelle
0	1	0	1	0	1	0	1
0	64	0	16	0	4	0	1
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Diese **„Binärzahl“** 01010101_2 wollen wir ins Dezimalsystem übersetzen:

(Der kleine Index $_2$ soll anzeigen, dass es sich um eine Zahl aus dem Zweiersystem handelt!)

Wir schreiben von rechts nach links als Zweierpotenzsumme, ähnlich der Zehnerpotenzsumme, bekannt aus dem Zehnersystem:

$$\mathbf{01010101_2} = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^7$$

$$= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 64 + 0 \cdot 128$$

$$= 1 + 4 + 16 + 64 = \mathbf{85}$$

Die Zahl 85 im Zehnersystem lautet im Binärsystem (Zweiersystem) 01010101_2

Zum besseren Verständnis des Zweiersystems findest du auf der folgenden Internet-Seite einen
online – Zweiersystem-Rechner

http://www.mathe.mobi

6. Aufgabe – Rechne vom Zweiersystem um ins Zehnersystem!

1011_2	=	$1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11$
1001_2	=	$1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 1 = 9$
11011_2	=	$1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 8 + 2 + 1 = 27$
1011001_2	=	$2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^0 = 64 + 16 + 8 + 1 = 89$
1000000_2	=	$2^6 = 64$
1111111_2	=	$2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 127$
11011101_2	=	$2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 221$
1000000000_2	=	$2^9 = 512$

7. Aufgabe – Rechne vom Zehnersystem um ins Zweiersystem!

Zerlege zunächst die Zahl in eine Summe aus Zweierpotenzen.

Beispiel: $14 = 8 + 4 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1111_2$

48	=	$32 + 16 = 2^5 + 2^4 = 110000_2$
21	=	$16 + 4 + 1 = 2^4 + 2^2 + 2^0 = 10101_2$
64	=	$2^6 = 1000000_2$
100	=	$64 + 32 + 4 = 2^6 + 2^5 + 2^2 = 1100100_2$
160	=	$128 + 32 = 2^7 + 2^5 = 10100000_2$
215	=	$128 + 64 + 16 + 4 + 2 + 1 = 11010111_2$
256	=	$1 \cdot 2^8 = 100000000_2$
1020	=	$512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 =$
1024	=	$1 \cdot 2^{10} = 10000000000_2$ | 1111111100_2