



Matheaufgaben lösen mit KI

Wie man mit ChatGPT
effizient Matheaufgaben
lösen kann.

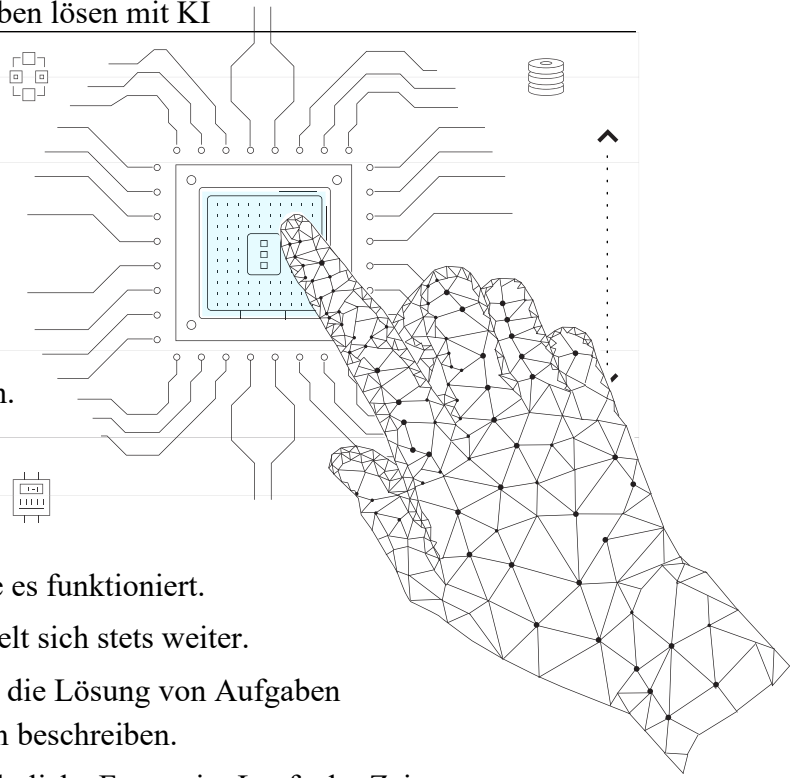
Was alles (noch)
nicht ganz richtig
funktioniert.

Worauf du achten solltest!

Jörg Christmann

Vorwort

Du hast Schwierigkeiten beim Lösen von Mathe-Aufgaben? Keine Sorge, dafür gibt es eine Lösung! Mit ChatGPT kannst du jetzt Mathematikprobleme ganz einfach lösen. In diesem Leitfaden erfährst du, wie du die leistungsstarke KI-Plattform optimal nutzt.



Wir zeigen dir an vielen Praxisbeispielen wie es funktioniert.

Bitte beachte: Das System ChatGPT entwickelt sich stets weiter.

Das bedeutet, dass schon in einigen Monaten die Lösung von Aufgaben möglich sein kann, die wir hier als unmöglich beschreiben.

Darüber hinaus können sich Antworten auf ähnliche Fragen im Laufe der Zeit oder je nach Standort oder Umfeld der Abfrage (z.B. Land, Sprache, Browser) verändern.

ChatGPT ist ein fortschrittliches Chatbot-System, das auf Künstlicher Intelligenz (KI) basiert. Es wurde entwickelt, um menschenähnliche Konversationen zu führen und umfangreiches Wissen zu verschiedenen Themen anzubieten.

Wenn es um Mathematik geht, kann ChatGPT dir dabei helfen, komplexe Aufgaben zu verstehen, Schritt-für-Schritt-Anleitungen bereitzustellen und dir dabei zu helfen, deine Lösungswege zu überprüfen.

Das Beste daran ist, dass ChatGPT jederzeit verfügbar ist und du nicht auf die Hilfe eines Lehrers oder eines Nachhilfe-Tutoren angewiesen bist. Gib einfach deine Frage oder dein Problem ein, und ChatGPT liefert dir eine detaillierte Erklärung oder einen Lösungsweg. Allerdings musst du einige Regeln beachten. Insbesondere die Formulierung der Aufgabenstellung ist von entscheidender Bedeutung für das spätere Ergebnis.

Lass uns gemeinsam entdecken, wie du die umfangreichen Fähigkeiten von ChatGPT nutzen kannst, um besser und einfacher Mathe-Aufgaben zu lösen. Erfahre auch, wo die Grenzen sind und wo ChatGPT noch Fehler macht oder nicht die beste Lösung ist.

Die aktuellen Fähigkeiten sind jedoch immens und bei der rasanten Geschwindigkeit, mit der sich KI-Systeme weiterentwickeln, ist es nur eine Frage der Zeit, bis die jetzigen Probleme behoben sind.

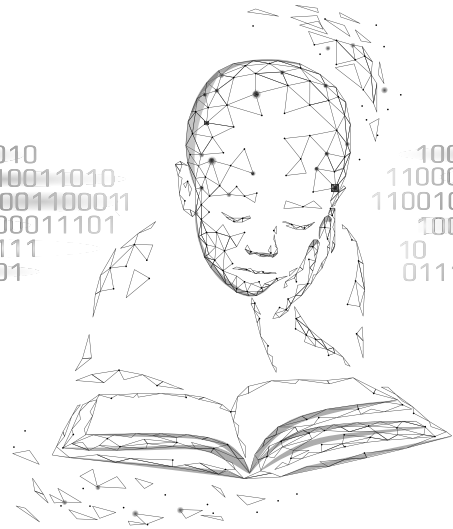
Inhaltsverzeichnis

1	EINFÜHRUNG.....	4
2	WAS IST KI, KÜNSTLICHE INTELLIGENZ	5
2.1	Einführung.....	5
2.2	Definition von Künstlicher Intelligenz (KI).....	5
2.3	Funktionsweise von Künstlicher Intelligenz	5
2.4	Anwendungsbereiche der Künstlichen Intelligenz	7
3	KANN KI ÜBERHAUPT MATHEAUFGABEN LÖSEN?.....	9
3.1	Der Aufbau von ChatGPT.....	9
3.2	Mathematikaufgaben lösen mit ChatGPT	10
3.3	Die Grenzen von ChatGPT bei Mathematikaufgaben.....	11
3.4	Ein erstes Beispiel für eine mathematische Aufgabenstellung.....	11
4	BEVOR WIR MIT CHATGPT MATHEAUFGABEN LÖSEN	14
4.1	LaTeX und mathematische Formeln	14
4.2	Wie kann man ChatGPT nutzen ?	18
4.3	Datenschutzrechtliche Aspekte.....	19
4.4	Eigenverantwortung gefragt.....	20
5	EINFACHE RECHENAUFGABEN LÖSEN.....	21
5.1	Anwendung der Rechengesetze	21
6	BINOMISCHE FORMELN, TERME, GLEICHUNGEN UND CO.....	24
6.1	Binomische Formeln.....	24
7	OBERSTUFENTHEMEN – ANALYSIS.....	28
7.1	Kurvendiskussion.....	28

1 Einführung

In diesem kurzen Text will ich euch die Möglichkeiten von ChatGPT zum Lösen von Matheaufgaben vorstellen.

101100 1001000011101010
01001101010 1111001010011010
100100000100001110 101001100011
1001110101001100 1001000011101
10111100101001101010 111
110011100100000100001



Einen wichtigen Punkt möchte ich jedoch betonen:
Wenn ihr ChatGPT „nur“ zum Lösen von Aufgaben und dem schnellen Erledigen von Hausaufgaben nutzen wollt, macht ihr einen entscheidenden Fehler:

Das wird euch im weiteren Leben nicht weiterbringen!

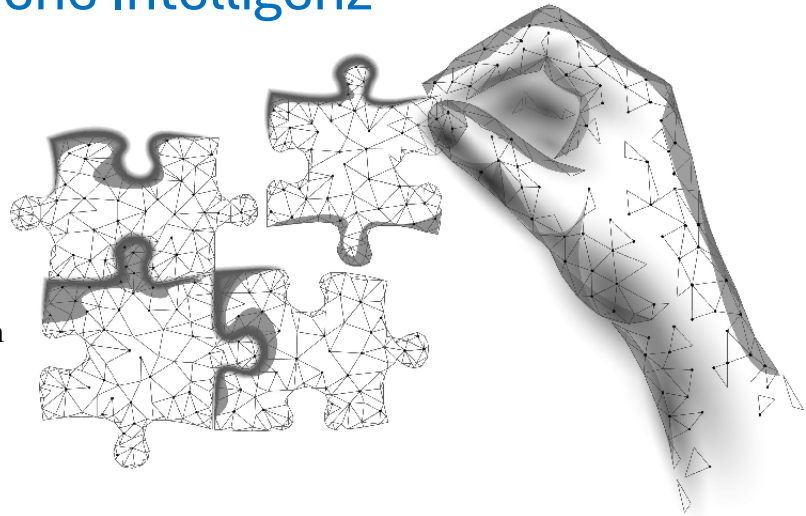
Nutzt ChatGPT, damit ihr die Aufgaben besser versteht. Stellt auch Fragen nach dem „Warum“ und „Wie“! Wenn ihr das verstanden habt, dann kann euch ChatGPT dabei helfen, die selbst gerechneten Aufgaben zu prüfen und die Lösung besser zu verstehen.

Wenn schon Mathe Hausaufgaben mit ChatGPT lösen, dann versucht, die Aufgabe in Teilaufgaben zu zerlegen und diese rechnen zu lassen. Baut die Aufgabe dann selbst ganz zusammen.

Dann freue dich jetzt auf interessante Kapitel. Dieses Skript ist noch nicht fertig gestellt. Schau mal wieder vorbei, ob es eine neue Version gibt.

2 Was ist KI, Künstliche Intelligenz

Was versteht man unter KI?
Wie funktioniert künstliche Intelligenz und was kann man sich darunter vorstellen?
Diese Themen wollen wir in diesem Kapitel untersuchen.



2.1 Einführung

Künstliche Intelligenz (KI) ist ein weitreichendes Feld der Informatik, das sich mit der Entwicklung von Systemen beschäftigt, die Aufgaben ausführen können, die normalerweise menschliche Intelligenz erfordern. Diese Aufgaben umfassen Lernen, Problemlösen, Wahrnehmung, Sprachverständnis und Entscheidungsfindung. KI hat in den letzten Jahrzehnten enorme Fortschritte gemacht und findet heute Anwendung in zahlreichen Bereichen, von der Medizin bis hin zu autonomen Fahrzeugen. Diese kurze Einführung bietet einen umfassenden Überblick über die Definition, Funktionsweise, Hauptkomponenten und Anwendungsbereiche der künstlichen Intelligenz.

2.2 Definition von Künstlicher Intelligenz (KI)

Künstliche Intelligenz ist die Simulation menschlicher Intelligenzprozesse durch Maschinen, insbesondere Computersysteme. Zu diesen Prozessen gehören das Lernen (die Erfassung von Informationen und Regeln für die Nutzung der Informationen), das Schließen (die Nutzung von Regeln, um zu approximativen oder definitiven Schlussfolgerungen zu gelangen) und die Selbstkorrektur. Spezifische Anwendungen der KI umfassen Expertensysteme, Spracherkennung und maschinelles Sehen.

2.3 Funktionsweise von Künstlicher Intelligenz

Die Funktionsweise von KI kann in mehrere Hauptkomponenten unterteilt werden: Daten, Algorithmen, Modelltraining und -evaluation, sowie das Deployment und die Nutzung der Modelle.

2.3.1 Daten

Daten sind das Fundament der KI. Ohne große Mengen an qualitativ hochwertigen Daten können KI-Systeme nicht effektiv arbeiten. Daten können in vielen Formen vorliegen, darunter strukturierte Daten (wie Tabellen), unstrukturierte Daten (wie Texte oder Bilder) und semi-strukturierte Daten (wie XML-Dokumente).

2.3.2 Algorithmen

Algorithmen sind eine Reihe von Anweisungen, die das System befolgt, um eine Aufgabe zu erfüllen oder ein Problem zu lösen. In der KI gibt es verschiedene Arten von Algorithmen, darunter überwachte und unüberwachte Lernalgorithmen, sowie Algorithmen für bestärkendes Lernen.

- Überwachtes Lernen: Dieser Ansatz verwendet gelabelte Datensätze, um Modelle zu trainieren. Ein Beispiel ist die Bildklassifikation, bei der Bilder mit entsprechenden Labels (z.B. „Hund“, „Katze“) versehen werden.
- Unüberwachtes Lernen: Dieser Ansatz arbeitet mit nicht gekennzeichneten Daten und versucht, verborgene Muster oder Strukturen in den Daten zu finden. Ein Beispiel ist das Clustering von Kunden in einem Marketing-Analysesystem.
- Bestärkendes Lernen: Hier lernt ein Agent durch Interaktionen mit seiner Umgebung, Belohnungen zu maximieren. Dies ist besonders nützlich in Bereichen wie Spielen oder Robotik.

2.3.3 Modelltraining und -evaluation

Der Trainingsprozess besteht darin, ein Modell mit einem Algorithmus und einem Datensatz zu trainieren. Dies erfordert die Optimierung von Parametern, um die beste Leistung zu erzielen. Die Evaluation umfasst das Testen des Modells auf neuen, nicht gesehenen Daten, um seine Genauigkeit und Generalisierungsfähigkeit zu bewerten.

2.3.4 Deployment und Nutzung der Modelle

Nach dem Training und der Evaluation eines Modells wird es in einer produktiven Umgebung bereitgestellt. Dies kann die Integration in eine Softwareanwendung, eine API oder ein eingebettetes System umfassen. Die Modelle werden dann kontinuierlich überwacht und gegebenenfalls aktualisiert, um ihre Leistung zu verbessern und auf Veränderungen in den Daten zu reagieren.

2.3.5 Hauptkomponenten der Künstlichen Intelligenz

- Maschinelles Lernen (Machine Learning, ML): Eine Unterkategorie der KI, die sich auf die Entwicklung von Algorithmen und Techniken konzentriert, die es Computern ermöglichen, aus und auf Daten zu lernen.
- Neuronale Netze: Modelle, die inspiriert von der Struktur und Funktionsweise des menschlichen Gehirns sind. Sie bestehen aus Schichten von Knoten (Neuronen), die miteinander verbunden sind.
- Natürliche Sprachverarbeitung (Natural Language Processing, NLP): Ein Bereich der KI, der sich mit der Interaktion zwischen Computern und menschlicher Sprache beschäftigt. Beispiele sind Sprachübersetzung, Sprachsynthese und Textanalyse.
- Computer Vision: Ein Bereich der KI, der es Computern ermöglicht, visuelle Daten aus der Welt zu interpretieren. Beispiele sind Gesichtserkennung, Objekterkennung und Bildsegmentierung.

2.4 Anwendungsbereiche der Künstlichen Intelligenz

2.4.1 Medizin:

- Diagnose und Behandlung: KI kann medizinische Bilder analysieren, Krankheiten diagnostizieren und personalisierte Behandlungspläne vorschlagen.
- Drug Discovery: KI kann neue Medikamente schneller und kostengünstiger entdecken, indem sie große Mengen an biologischen Daten analysiert.

2.4.2 Autonome Fahrzeuge:

- Selbstfahrende Autos: KI wird verwendet, um die Umgebung zu erkennen, Entscheidungen zu treffen und Fahrzeuge sicher zu steuern.
- Optimierung des Verkehrsflusses: KI kann Verkehrsströme analysieren und optimieren, um Staus zu reduzieren und die Effizienz zu verbessern.

2.4.3 Finanzwesen:

- Betrugserkennung: KI kann verdächtige Transaktionen in Echtzeit analysieren und Betrug verhindern.
- Algorithmischer Handel: KI kann Marktanalysen durchführen und Handelsstrategien entwickeln, die menschliche Händler übertreffen.

2.4.4 Kundendienst:

- Chatbots: KI-gesteuerte Chatbots können Kundenanfragen beantworten, Support bieten und das Kundenerlebnis verbessern.

- Spracherkennung: KI-Systeme können gesprochene Sprache verstehen und darauf reagieren, was besonders in Call-Center-Anwendungen nützlich ist.

2.4.5 Unterhaltung:

- Empfehlungssysteme: KI kann Benutzerpräferenzen analysieren und personalisierte Empfehlungen für Filme, Musik oder Produkte geben.
- Spielentwicklung: KI wird verwendet, um intelligentere und realistischere Nicht-Spieler-Charaktere (NPCs) in Videospielen zu erstellen.

2.4.6 Herausforderungen und ethische Überlegungen

Während KI viele Vorteile bietet, gibt es auch Herausforderungen und ethische Bedenken, die berücksichtigt werden müssen:

- Datenschutz: Der Umgang mit großen Datenmengen wirft Fragen zum Schutz der Privatsphäre auf.
- Bias und Fairness: KI-Systeme können voreingenommen sein, wenn die zugrunde liegenden Daten Vorurteile enthalten.
- Transparenz: Es ist wichtig, die Entscheidungsprozesse von KI-Systemen verständlich und nachvollziehbar zu machen.
- Arbeitsmarkt: Die Automatisierung durch KI kann Arbeitsplätze in bestimmten Sektoren gefährden, erfordert jedoch gleichzeitig neue Fähigkeiten und Arbeitsrollen.

3 Kann KI überhaupt Matheaufgaben lösen?

In diesem Kapitel wollen wir uns den Aufbau einer KI-Software anschauen und der Frage nachgehen, ob eine künstliche Intelligenz überhaupt Matheaufgaben lösen kann. Eine KI-Software hat nahezu unendlich viele Daten gesammelt und greift bei einer Abfrage darauf zurück.

Daher kann ChatGPT zum Beispiel auch keine aktuelle Wettervorhersage machen, da die hierzu benötigten Daten dem System nicht vorliegen.



3.1 Der Aufbau von ChatGPT

Um diese Frage beantworten zu können, wollen wir die Architektur von ChatGPT ein wenig unter die Lupe nehmen. ChatGPT basiert auf einer sogenannten GPT-Architektur (Generative Pre-trained Transformer), die von der Firma OpenAI entwickelt wurde. Die Hauptkomponenten und Funktionsweisen dieser Architektur sind die folgenden:

Transformermodell:

ChatGPT nutzt die Transformer-Architektur, die auf Selbstaufmerksamkeit und vollständig verbundenen Schichten basiert. Dies ermöglicht es dem Modell, lange Abhängigkeiten in Textdaten zu erfassen und kontextuell relevante Informationen zu nutzen.

Vortrainierung (Pre-trained):

Das Modell wird auf großen Mengen von Textdaten vortrainiert. In dieser Phase lernt das Modell, die Struktur und die Muster der Sprache zu verstehen, indem es versucht, das nächste Wort in einem Satz vorherzusagen.

Feinabstimmung (Fine-Tuning):

Nach dem Pre Training (Vortrainierung) wird das Modell auf spezifischeren Datensätzen feinabgestimmt. Diese Datensätze enthalten oft spezifische Anweisungen und menschliche Feedback-Schleifen, um das Modell auf bestimmte Aufgaben oder Verhaltensweisen zu trainieren.

Tokenisierung:

Textdaten werden in Tokens (kleinere Einheiten wie Wörter oder Subwörter) zerlegt, bevor sie dem Modell zugeführt werden. Diese Tokens werden dann in numerische Vektoren umgewandelt, die das Modell verarbeiten kann.

Generierung:

Bei der Textgenerierung nutzt das Modell die während des Trainings erlernten Wahrscheinlichkeiten, um vorherzusagen, welches Token als nächstes kommen sollte. Es generiert Text, indem es diese Wahrscheinlichkeiten sequenziell nutzt.

3.2 Mathematikaufgaben lösen mit ChatGPT

Ja, ChatGPT kann Mathematikaufgaben lösen, insbesondere wenn sie innerhalb seines Verständnisses und seiner Trainingsdaten liegen. Viele Menschen trauen ChatGPT diese Aufgabe nicht zu oder sind der Meinung, dass es nicht funktioniert. Genau das will ich in diesem Leitfaden untersuchen und nachweisen. Hier sind jedoch einige wichtige Punkte dazu, auf die du unbedingt achten musst. In den folgenden Kapiteln werde ich dann auf die verschiedensten Aufgabentypen in der Mathematik eingehen und die Besonderheiten bei der Formulierung der Aufgabenstellung eingehen.

Grundlegende Arithmetik und Algebra:

ChatGPT kann grundlegende arithmetische Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) sowie einfache algebraische Aufgaben lösen.

Komplexere Mathematik:

Für komplexere Mathematik wie die Integralrechnung und Differentialrechnung, lineare Algebra und statistische Berechnungen kann ChatGPT Erklärungen und Schritte zur Lösung anbieten, obwohl es nicht immer perfekt ist. Gerade hier kommt es auf die exakte Formulierung der Fragestellung an und die Zerlegung einer Aufgabenstellung in einzelne Teilaufgaben. Worauf du hier genau achten musst, zeige ich später.

Symbolische Berechnungen und Termumformungen:

ChatGPT kann symbolische Berechnungen und Manipulationen durchführen, zum Beispiel die Vereinfachung von Ausdrücken oder das Lösen von Gleichungen. Auch hier kommt es auch die genaue Formulierung an.

3.3 Die Grenzen von ChatGPT bei Mathematikaufgaben

Komplexität und Genauigkeit:

Obwohl ChatGPT viele Mathematikaufgaben lösen kann, ist es nicht immer perfekt und kann bei sehr komplexen oder ungewöhnlichen Problemen Fehler machen. Das das aber nicht so sein muss, werden wir noch lernen. Außerdem lernt ChatGPT dazu. Das heißt, dass in einigen Wochen oder Monaten die Lösung einer Aufgabe korrekt sein kann, obwohl jetzt eine Aufgabe noch fehlerhaft gelöst wird.

Rechenaufwand:

ChatGPT ist nicht speziell für numerisch intensive Berechnungen optimiert, die spezielle Software oder Algorithmen erfordern könnten. Eine Aufgabe wäre zum Beispiel die Berechnung der Zahl Pi auf einige hunderttausend Nachkommastellen. Allerdings könnte man ChatGPT in diesem Fall den Programmcode in einer bestimmten Programmiersprache, wie zum Beispiel JavaScript/HTML oder Python erstellen lassen. Auch in diesem Fall sind die genaue Beschreibung und Spezifizierung des Algorithmus von entscheidender Bedeutung. Die Erstellung von Programmcode werden wir jedoch nicht in diesem Skript behandeln.

Kontextverständnis:

Bei mehrdeutigen oder schlecht formulierten Fragen könnte das GPT-Modell Schwierigkeiten haben, den genauen Kontext zu erfassen und die richtige Lösung zu liefern. Genau aus diesem Grund habe ich mich entschieden, diesen Leitfaden zu erstellen, um den Umgang mit ChatGPT und die präzise Fragestellung zu erlernen und zu trainieren.

3.4 Ein erstes Beispiel für eine mathematische Aufgabenstellung

Wir wollen eine einfache Gleichung lösen. Diese Gleichung können wir ohne Sonderzeichen einfach über die Tastatur eingeben. Diese Fragestellung für die Gleichung geben wir ein:

Löse die Gleichung $2x + 3 = 7$

Als Antwort bzw. Lösung erhalten wir auf dem Bildschirm:

Löse die Gleichung $2x + 3 = 7$



Um die Gleichung $2x + 3 = 7$ zu lösen, folgen wir diesen Schritten:

1. Subtrahiere 3 von beiden Seiten der Gleichung:

$$2x + 3 - 3 = 7 - 3$$

Das vereinfacht sich zu:

$$2x = 4$$

2. Teile beide Seiten durch 2, um x zu isolieren:

$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$$

Das vereinfacht sich zu:

$$x = 2$$

Die Lösung der Gleichung $2x + 3 = 7$ ist also:

$$x = 2$$

Kopieren wir die Antwort von ChatGPT in die Zwischenablage (siehe Bild rechts), erhalten wir folgenden Text:



Um die Gleichung $(2x + 3 = 7)$ zu lösen, folgen wir diesen Schritten:

1. **Subtrahiere 3 von beiden Seiten der Gleichung**:

$$\begin{aligned} \backslash & \\ 2x + 3 - 3 &= 7 - 3 \end{aligned}$$

Das vereinfacht sich zu:

$$\begin{aligned} \backslash & \\ 2x &= 4 \end{aligned}$$

2. **Teile beide Seiten durch 2**:

$$\begin{aligned} \backslash & \\ \frac{2x}{2} &= \frac{4}{2} \end{aligned}$$

Das vereinfacht sich zu:

$$\begin{aligned} \backslash & \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Die Lösung der Gleichung $(2x + 3 = 7)$ ist also:

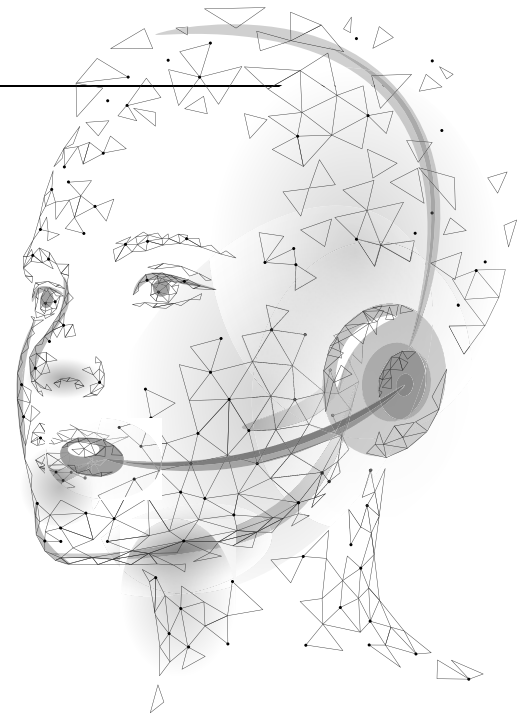
```
\[  
x = 2  
\]
```

In dieser Lösung sehen wir zum Beispiel den etwas kryptisch erscheinenden Code:

```
\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}.
```

Hierbei handelt es sich um die Darstellung von mathematischen Ausdrücken in der Layout-Sprache LaTeX. Dazu jetzt mehr im nächsten Kapitel.

4 Bevor wir mit ChatGPT Matheaufgaben lösen



In diesem Abschnitt besprechen wir, welche Dinge wir wissen sollten, um die Arbeit mit ChatGPT besser zu verstehen.

- Wie kann man komplizierte mathematische Formeln richtig und anschaulich darstellen?
- Wie registriert man sich bei ChatGPT und was kostet dieser Dienst?
- Welche datenschutzrechtlichen Aspekte müssen wir vor der Nutzung beachten?

4.1 LaTeX und mathematische Formeln

4.1.1 Was ist LateX und wie kann uns das beim Matheaufgaben lösen helfen?

LaTeX (ausgesprochen „La-Tech“) ist ein textbasiertes Markup-System insbesondere für den Satz von Dokumenten mit umfangreichen Formeln und eine Software für die Erstellung und Verarbeitung von Dokumenten, insbesondere im wissenschaftlichen und technischen Bereich. Entwickelt in den 1980er Jahren von Leslie Lamport als Erweiterung des Satzsystems TeX von Donald Knuth, bietet LaTeX eine hohe Kontrolle über das Layout und die Formatierung von Dokumenten.

Möchten wir mit einer künstlichen Intelligenz mathematische Aufgaben lösen lassen, ist ein Basiswissen an LaTeX hilfreich, um die Ausgabe der Lösungen entsprechend schön formatiert darstellen zu lassen. Wie wir das nutzen können, werde ich im Verlauf der nächsten Kapitel zeigen.

4.1.2 Bedeutung von LaTeX für das Erstellen wissenschaftlicher Dokumente

LaTeX ist besonders bekannt für seine Fähigkeit, mathematische und wissenschaftliche Formeln präzise und ästhetisch ansprechend darzustellen. Es verwendet eine spezielle Syntax, die es ermöglicht, komplexe mathematische Ausdrücke klar und strukturiert zu schreiben.

LaTeX automatisiert viele Aspekte der Dokumentformatierung, einschließlich Inhaltsverzeichnisse, Literaturverzeichnisse, Tabellen, Abbildungen und Querverweise. Dies stellt sicher, dass große Dokumente konsistent und professionell formatiert sind, was besonders in wissenschaftlichen Arbeiten wichtig ist.

LaTeX bietet eine flexible Struktur für Dokumente, die es ermöglicht, verschiedene Teile des Dokuments (wie Abschnitte, Kapitel und Unterkapitel) einfach zu organisieren und zu verwalten.

4.1.3 Beispiele komplexer Formeln mit LaTeX

Maxwells Gleichungen (im Vakuum)

```
\documentclass{article}
\usepackage{amsmath}
\begin{document}

\begin{align}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}
\end{align}

\end{document}
```

Diese Gleichungen beschreiben die grundlegenden Prinzipien der Elektrodynamik und sind für das Verständnis von elektrischen und magnetischen Feldern wesentlich. In gesetzter Form in einem Dokument sehen diese Formeln dann so aus:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung

```

\documentclass{article}
\usepackage{amsmath}
\begin{document}

\[
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0
\]

\end{document}

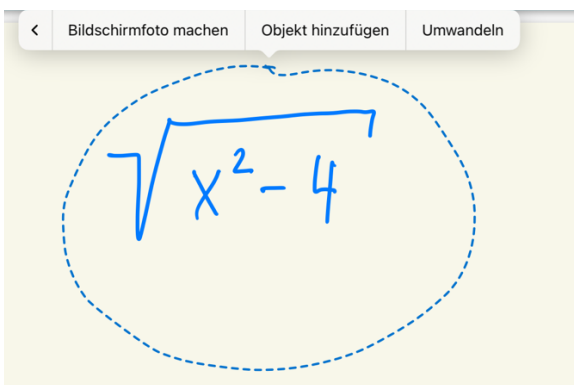
```

Diese Gleichung ist ein fundamentales Werkzeug in der analytischen Mechanik und wird zur Ableitung der Bewegungsgleichungen eines Systems verwendet. In gesetzter Form in einem Dokument sehen diese Formeln dann so aus:

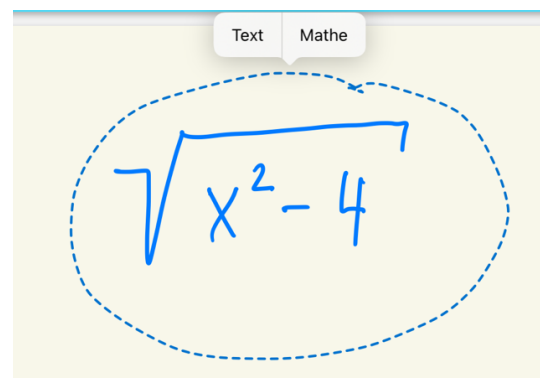
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

4.1.4 LaTeX Formeln in der Tablet-App Goodnotes

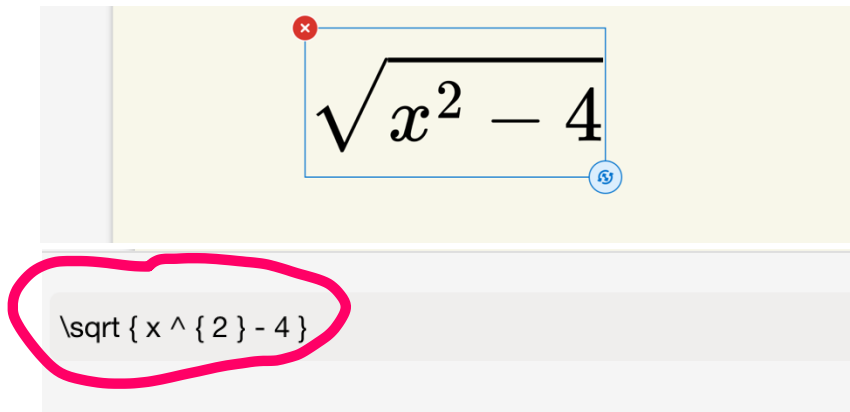
Ab Version 6 der App Goodnotes für einen Tablet Computer (wie z.B. das iPad der Firma Apple) ist eine Handschriftenerkennung integriert, die auch die Umwandlung in mathematische Formeln erlaubt. Wird eine Formel erkannt, erscheint im unteren Bildschirmbereich auch ein kryptisch erscheinender Text. Dieser Text ist genau die LaTeX Schreibweise der Formel.



Formel mit dem Stift erstellen und markieren,
Umwandeln auswählen



Umwandeln in „Mathe“ auswählen



LaTeX Formel erscheint nach der Umwandlung
in der unteren Bildschirmzeile von Goodnotes

Auf diese Art kannst du auch eine komplizierte mathematische Formel in LaTeX erstellen, ohne selbst die Syntax von LaTeX selbst zu kennen. Das kann uns später helfen, eine komplexe Berechnung von einer KI durchführen zu lassen.

4.2 Wie kann man ChatGPT nutzen ?

Um ChatGPT nutzen zu können, musst du einige grundlegende Schritte befolgen. Hier ist eine kleine Anleitung sowie ein Überblick über die Unterschiede zwischen der kostenlosen und der zahlungspflichtigen Version von ChatGPT. Wir werden hier nur Funktionen zur Lösung von Matheaufgaben beschreiben, die mit der kostenlosen Version möglich sind.

4.2.1 Registrierung

Gehe auf die OpenAI-Website (<https://www.openai.com/>) und registriere dich für ein Konto, wenn du noch keines hast. Hierbei ist nur die Angabe einer E-Mail-Adresse zwingend erforderlich. Wenn Du Bedenken hast, dass deine Daten nicht ordnungsgemäß genutzt werden kannst du auch eine separate E-Mail Adresse verwenden, die nicht deinen Namen enthält angeben. Nach der Registrierung und Anmeldung kannst Du ChatGPT direkt über die OpenAI-Website nutzen.

4.2.2 Kostenlose Version gegenüber der zahlungspflichtigen Version

Kostenlose Version

Die kostenlose Version ist für alle Benutzer zugänglich und bietet grundlegende Funktionen von ChatGPT. Es gelten jedoch folgende Einschränkungen:

- Begrenzte Anzahl von Anfragen pro Monat oder Tag.
- Möglicherweise geringere Priorität bei der Verarbeitung von Anfragen während Zeiten hoher Nachfrage.
- Eingeschränkter Zugriff auf die neuesten und leistungsfähigsten Modelle.
- Es kann Zeiten geben, in denen die kostenlose Version nicht verfügbar ist oder langsamer reagiert, insbesondere wenn die Serverkapazitäten ausgelastet sind.

Zahlungspflichtige Version (ChatGPT Plus oder API-Zugriff)

Bei der zahlungspflichtigen Version fällt eine monatliche Gebühr (z.B. ChatGPT Plus kostet etwa \$20 pro Monat) an. Die aktuellen Preise musst du auf der Website von OpenAI nachschlagen.

Unterschiede zur kostenlosen Version:

- Verbesserte Verfügbarkeit, bevorzugter Zugang zu den Servern, was bedeutet, dass deine Anfragen auch während Stoßzeiten schneller und zuverlässiger verarbeitet werden.
- Erweiterte Funktionen: Zugriff auf die neuesten und leistungsfähigsten Modelle von GPT (z.B. GPT-4 im Vergleich zu GPT-3.5).

- Höhere Anzahl von Anfragen pro Monat oder Tag, abhängig vom Abonnementplan.
- Schnellere Reaktionszeiten und insgesamt bessere Leistung.

Die kostenlose Version von ChatGPT bietet einen guten Einstieg und grundlegende Funktionen, ist jedoch in Bezug auf Anfragen und Verfügbarkeit eingeschränkt. Die zahlungspflichtige Version bietet hingegen bevorzugten Zugang, schnellere Reaktionszeiten, erweiterte Funktionen und Zugang zu den neuesten Modellen, was sie ideal für Benutzer macht, die häufige und leistungsfähige Interaktionen mit dem Modell benötigen.

4.3 Datenschutzrechtliche Aspekte

Bei der Verwendung von ChatGPT für mathematische Aufgaben ist es wichtig, die Sicherheits- und Datenschutzaspekte zu beachten. Hier sind einige Punkte, die Du berücksichtigen solltest:

Vertrauliche Informationen

Vermeide die Eingabe von persönlichen oder vertraulichen Informationen in das Chatfenster von ChatGPT. ChatGPT ist ein öffentliches System und deine Informationen könnten möglicherweise später für andere Antworten verwendet werden.

Vorsicht bei sensiblen Themen

Sei vorsichtig, wenn es um sensible Themen wie Finanzdaten oder persönliche Identifikationsinformationen wie zum Beispiel deinen Namen geht. Gib solche Informationen nicht in das Chatfenster ein. Diese Informationen werden für die Lösung einer Matheaufgabe auch nicht benötigt.

Datenschutzbestimmungen

ChatGPT kann nicht nur über die Webseite des Erfinders OpenAI genutzt werden. Inzwischen bieten viele andere Anbieter von Diensten eine Chatroboter an, der auf ChatGPT basiert. In diesem Fall musst du die Allgemeinen Geschäftsbedingungen dieses Anbieters genau lesen. Zur Nutzung des Dienstes auf dessen Homepage hast du dort unter Umständen AGB's akzeptiert und auch persönliche Daten hinterlassen!

Lies die Datenschutzbestimmungen jedes ChatGPT-Anbieters sorgfältig durch, um zu verstehen, wie deine Daten verwendet und geschützt werden. Achten auf Anbieter, die klare Richtlinien zum Schutz deiner Privatsphäre haben.

Aktualisiere deine Software

Achte darauf, dass dein Betriebssystem und deine Antivirensoftware auf dem neuesten Stand sind, um Sicherheitsrisiken zu minimieren. Halte Sie auch die ChatGPT-Anwendung, sofern sie nicht über den Browser aufgerufen wird, auf dem neuesten Stand, um von Verbesserungen und Sicherheitsupdates zu profitieren.

4.4 Eigenverantwortung gefragt

Der Umgang mit einer Künstlichen Intelligenz Software mag verlockend sein. Trotzdem muss sich jeder der Verantwortung bewusst sein, keine Fake-Artikel zu erstellen, die dann als richtig verkauft werden. Beim Thema „Matheaufgaben lösen“ liegt die Verantwortung etwas anders. Du solltest ChatGPT nicht nur als Aufgabenlöser verstehen. Wenn du ChatGPT nur als Tool zur schnellen Hausaufgabenbewältigung siehst, machst du einen grundlegenden Fehler: Du verlässt dich auf ein System, ohne die Aufgaben, die gelöst werden sollen, auch wirklich zu verstehen.

Um mit ChatGPT und Mathematik Aufgaben richtig zu arbeiten, sollte man die Aufgabenstellung schon verstehen und eine grobe Vorstellung von dem Lösungsansatz haben.

Das hat zwei große Vorteile:

- Du kannst die Aufgabe schon besser und im richtigen Aufbau eingeben.
- Du kannst die Lösung anschließend besser verstehen.

In diesem Sinne kann ich ChatGPT nur als Ergänzung zum besseren Verständnis von mathematischen Problemen empfehlen. Jede Lösung sollte nur dann verwendet werden oder vor einer Gruppe von Personen präsentiert werden, wenn jeder Rechenschritt auch verstanden wurde.

Es bietet sich in diesem Zusammenhang an, die Lösungen von ChatGPT immer selbst nachzurechnen, wenn es möglich ist. Je nach Komplexität der Aufgabenstellungen und der Genauigkeit der Eingabe der Frage muss man immer mit fehlerhaften Lösungsvorschlägen rechnen!

5 Einfache Rechenaufgaben lösen

5.1 Anwendung der Rechengesetze

Für die Eingabe der Rechnungen verwenden wir die folgenden Rechenzeichen, die direkt per Tastatur eingegeben werden können:

- Addition: +
- Subtraktion: -
- Multiplikation: * oder x
- Division: : oder /
- Klammern: ()
- Potenzen: ^

Aufgabe: $27 \cdot 258 + 2000 - 13 \cdot 20 = 6966 + 2000 - 260 = 8706$

Für die Eingabe schreiben wir die Aufgabe mit den Rechenzeichen der Tastatur:

Berechne $27*258+2000-13*20$

Abfrage am 31.05.2024

Berechne $27*258+2000-13*20$



Die Berechnung des Ausdrucks $27 \times 258 + 2000 - 13 \times 20$ ergibt:

$$27 \times 258 + 2000 - 13 \times 20 = 8706$$

Das Ergebnis ist 8706. [-]

Beim ersten Aufruf wird die Aufgabe wie oben gelöst und angezeigt. Wie unterscheidet sich nun die Bearbeitung der Aufgabe, wenn wir als Multiplikationszeichen das Kreuz verwenden? Das Kreuz geben wir als keines x ein.

Berechne $27 \times 258 + 2000 - 13 \times 20$

Abfrage am 31.05.2024

Berechne $27 \times 258 + 2000 - 13 \times 20$



Um den Ausdruck $27 \times 258 + 2000 - 13 \times 20$ zu berechnen, gehen wir schrittweise vor:

1. Berechne 27×258 :

$$27 \times 258 = 6966$$

2. Berechne 13×20 :

$$13 \times 20 = 260$$

3. Setze die berechneten Werte in den ursprünglichen Ausdruck ein:

$$6966 + 2000 - 260$$

4. Addiere 6966 und 2000:

$$6966 + 2000 = 8966$$

5. Subtrahiere 260 von 8966:

$$8966 - 260 = 8706$$

Das Ergebnis der Berechnung ist:

$$8706$$

Die Aufgabe wird nun mit Lösungsschritten gelöst. Geben wir eine weitere Aufgabe wieder mit dem Stern als Multiplikationszeichen ein, wird die Aufgabe wieder mit Lösungsschritten ausgegeben.

Aufgabe: $21 \cdot 198 + 200 : 5$

Abfrage am 31.05.2024

Berechne $21 \cdot 198 + 200 : 5$



Die Berechnung des Ausdrucks $21 \times 198 + \frac{200}{5}$ ergibt:

1. Berechne 21×198 :

$$21 \times 198 = 4158$$

2. Berechne $\frac{200}{5}$:

$$\frac{200}{5} = 40$$

3. Addiere die beiden Ergebnisse:

$$4158 + 40 = 4198$$

Das Ergebnis ist 4198. [-]

Die alternative Eingabe mit „/“ als Division:

Berechne $21 \times 198 + 200/5$



Um den Ausdruck $21 \times 198 + 200/5$ zu berechnen, gehen wir schrittweise vor:

1. Berechne 21×198 :

$$21 \times 198 = 4158$$

2. Berechne $200/5$:

$$200/5 = 40$$

3. Addiere die beiden Ergebnisse:

$$4158 + 40 = 4198$$

Das Ergebnis der Berechnung ist:

$$4198$$

Rechnungen mit Klammern werden ebenso gut berechnet. Du solltest jedoch nicht zu viele Klammern ineinander verschachteln. In einem solchen Fall sollte die Aufgabe in mehrere Teilaufgaben zerlegt werden.

6 Binomische Formeln, Terme, Gleichungen und Co.

6.1 Binomische Formeln

6.1.1 Definitionen

In der Schule lernen wir normalerweise immer die drei binomischen Formeln kennen. Sollten wir die drei Formeln vergessen haben, können wir auch ChatGPT testen, ob er sie uns wieder schnell anzeigen lassen kann.

Wie lauten die drei Binomischen Formeln in der Mathematik?

Und schon sind wir wieder etwas schlauer.

Abfrage am 05.06.2024

Wie lauten die drei Binomischen Formeln in der Mathematik?



Die drei binomischen Formeln in der Mathematik lauten:

1. **Erste binomische Formel** (Quadrat einer Summe):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. **Zweite binomische Formel** (Quadrat einer Differenz):

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. **Dritte binomische Formel** (Produkt einer Summe und einer Differenz):

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Diese Formeln sind nützlich, um das Produkt von Binomen zu berechnen und algebraische Ausdrücke zu vereinfachen.

6.1.2 Binomische Formeln berechnen

Kann ChatGPT auch binomische Formeln ausmultiplizieren oder gar binomische Formeln rückwärts? Für diese Problemstellung ist die exakte Fragestellung von entscheidender Bedeutung.

Wir wollen die folgenden Binomischen Formeln berechnen:

a) $(0.5x^2 + 3y^3)^2$ b) $\left(\frac{3}{2}a - \frac{1}{3}b\right)^2$

Überlege, wie wir diese Formeln am besten eingeben.

Variante 1, Aufgabe a): Wir verwenden die Formel $(0.5x^2+3y^3)*(0.5x^2+3y^3)$

Berechne $(0.5x^2+3y^3)*(0.5x^2+3y^3)$

Bei der Abfrage verwenden wir NICHT den Begriff binomische Formel und trotzdem erhalten wir eine sehr ausführliche Berechnung mit dem Hinweis, dass es sich um die erste binomische Formel handelt.

Abfrage am 05.06.2024

Berechne $(0.5x^2+3y^3)*(0.5x^2+3y^3)$



Um den Ausdruck $(0.5x^2 + 3y^3) \times (0.5x^2 + 3y^3)$ zu berechnen, verwenden wir die erste binomische Formel:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Setze $a = 0.5x^2$ und $b = 3y^3$ ein:

$$(0.5x^2 + 3y^3)^2 = (0.5x^2)^2 + 2(0.5x^2)(3y^3) + (3y^3)^2$$

Berechne die einzelnen Terme:

1. $(0.5x^2)^2$:

$$(0.5x^2)^2 = 0.25x^4$$

2. $2(0.5x^2)(3y^3)$:

$$2(0.5x^2)(3y^3) = 2 \times 0.5 \times 3x^2y^3 = 3x^2y^3$$

3. $(3y^3)^2$:

$$(3y^3)^2 = 9y^6$$

Fasse die Terme zusammen:

$$(0.5x^2 + 3y^3)^2 = 0.25x^4 + 3x^2y^3 + 9y^6$$

Das ist das Endergebnis:

$$(0.5x^2 + 3y^3)^2 = 0.25x^4 + 3x^2y^3 + 9y^6$$

Variante 2, Aufgabe a): Wir verwenden die Formel $(0.5x^2 + 3y^3)^2$

Berechne die binomische Formel $(0.5x^2 + 3y^3)^2$

Diese Formel wird ebenfalls richtig erkannt und das Ergebnis genauso ausführlich beschrieben.

Abfrage am 05.06.2024

Berechne die binomische Formel $(0.5x^2 + 3y^3)^2$



Um den Ausdruck $(0.5x^2 + 3y^3)^2$ zu berechnen, verwenden wir die erste binomische Formel:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Setze $a = 0.5x^2$ und $b = 3y^3$ ein:

$$(0.5x^2 + 3y^3)^2 = (0.5x^2)^2 + 2(0.5x^2)(3y^3) + (3y^3)^2$$

Berechne die einzelnen Terme:

1. $(0.5x^2)^2$:

$$(0.5x^2)^2 = 0.25x^4$$

2. $2(0.5x^2)(3y^3)$:

$$2(0.5x^2)(3y^3) = 2 \times 0.5 \times 3x^2 \times y^3 = 3x^2y^3$$

3. $(3y^3)^2$:

$$(3y^3)^2 = 9y^6$$

Fasse die Terme zusammen:

$$(0.5x^2 + 3y^3)^2 = 0.25x^4 + 3x^2y^3 + 9y^6$$

Das ist das Endergebnis:

$$(0.5x^2 + 3y^3)^2 = 0.25x^4 + 3x^2y^3 + 9y^6$$

Aufgabe b) $\left(\frac{3}{2}a - \frac{1}{3}b\right)^2$

Die Brüche geben wir mit dem Schrägstrich ein. Alternativ geben wir die Formel als LaTeX Formel ein.

Berechne $\left(\frac{3}{2}a - \frac{1}{3}b\right)^2$

Diese Formel wird von ChatGPT direkt in die richtige Form wie in der Aufgabenstellung umgewandelt. Die Berechnung wird korrekt ausgeführt, **allerdings wird ein Fehler gemacht**. Fällt er dir auf?

Abfrage vom 05.06.2024

Berechne $(\frac{3}{2}a - \frac{1}{3}b)^2$



Um den Ausdruck $(\frac{3}{2}a - \frac{1}{3}b)^2$ zu berechnen, verwenden wir die erste binomische Formel:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Setze $a = \frac{3}{2}a$ und $b = \frac{1}{3}b$ ein:

$$\left(\frac{3}{2}a - \frac{1}{3}b\right)^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}a\right)\left(\frac{1}{3}b\right) + \left(\frac{1}{3}b\right)^2$$

Berechne die einzelnen Terme:

1. $\left(\frac{3}{2}a\right)^2$:

$$\left(\frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{9}{4}a^2$$

2. $2\left(\frac{3}{2}a\right)\left(\frac{1}{3}b\right)$:

$$2\left(\frac{3}{2}a\right)\left(\frac{1}{3}b\right) = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \times ab = ab$$

3. $\left(\frac{1}{3}b\right)^2$:

$$\left(\frac{1}{3}b\right)^2 = \frac{1}{9}b^2$$

Fasse die Terme zusammen:

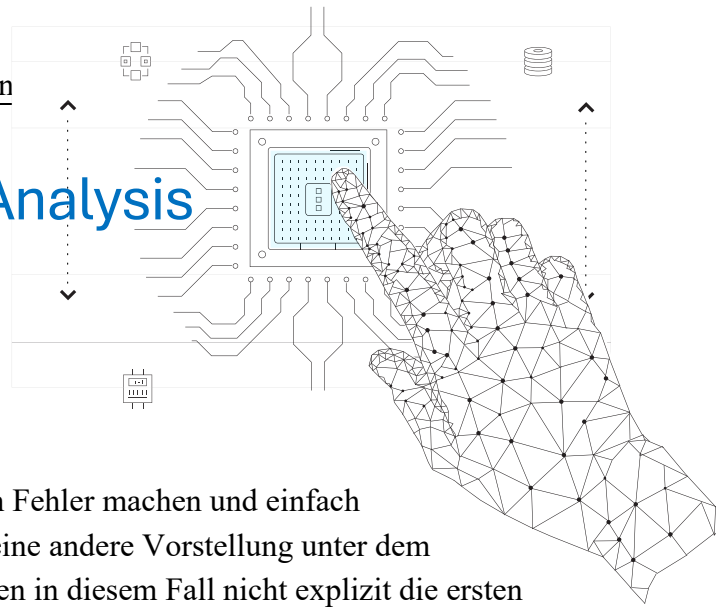
$$\left(\frac{3}{2}a - \frac{1}{3}b\right)^2 = \frac{9}{4}a^2 - ab + \frac{1}{9}b^2$$

Das ist das Endergebnis:

$$\left(\frac{3}{2}a - \frac{1}{3}b\right)^2 = \frac{9}{4}a^2 - ab + \frac{1}{9}b^2$$

Es handelt sich bei dieser Aufgabe nicht um die erste binomische Formel, sondern um die zweite binomische Formel. ChatGPT ist an dieser Stelle nicht vollkommen fehlerfrei.

7 Oberstufenthemen – Analysis



7.1 Kurvendiskussion

Für die Diskussion einer Funktion darf man nicht den Fehler machen und einfach nur eine Kurvendiskussion verlangen. ChatGPT hat eine andere Vorstellung unter dem Begriff „Kurvendiskussion“ als wir. Außerdem werden in diesem Fall nicht explizit die ersten drei Ableitungen der Funktion gebildet. Die Reihenfolge der einzelnen Teilaufgaben wird wahrscheinlich auch nicht unserer Vorstellung entsprechen. Wie bei vielen anderen Aufgabenstellungen sollte daher die Aufgabenstellung in Teilaufgaben zerlegt werden und sehr genau spezifiziert werden. Die Funktion schreiben wir in LaTeX-Schreibweise.

Unser Ziel: Führe eine Kurvendiskussion für die Funktion $f(x) = x^4 - 4x^2$ durch.

Wir formulieren ausführlich:

Bestimme für die Funktion $f(x)=x^4-4x^2$ die erste, zweite und dritte Ableitung. Bestimme die Nullstellen der Funktion. Bestimme die Extremstellen der Funktion und die Wendestellen der Funktion. Welche Symmetrie liegt vor?

Datum der Abfrage: 31.05.2024

Wir erhalten eine sehr ausführliche Antwort. Die Rechnungen werden Schritt für Schritt durchgeführt und sogar noch erläutert. Am Ende der Antwort erfolgt noch eine Zusammenfassung.

Der folgende Text erscheint als Antwort von ChatGPT im Browser:



Ableitungen der Funktion $f(x) = x^4 - 4x^2$

1. Erste Ableitung $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^4) - \frac{d}{dx}(4x^2) = 4x^3 - 8x$$

2. Zweite Ableitung $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(4x^3) - \frac{d}{dx}(8x) = 12x^2 - 8$$

3. Dritte Ableitung $f'''(x)$:

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}(12x^2) - \frac{d}{dx}(8) = 24x$$

Nullstellen der Funktion

Die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^4 - 4x^2$ finden wir, indem wir $f(x) = 0$ setzen:

$$x^4 - 4x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 4) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - 4 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 = 4$$

$$x = 0, \quad x = \pm 2$$

Die Nullstellen sind also:

$$x = -2, \quad x = 0, \quad x = 2$$

Extremstellen der Funktion

Extremstellen finden wir, indem wir $f'(x) = 0$ setzen:

$$4x^3 - 8x = 0$$

$$4x(x^2 - 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - 2 = 0$$

$$x = 0, \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Um festzustellen, ob es sich um Minima oder Maxima handelt, betrachten wir die zweite Ableitung $f''(x)$:

$$f''(x) = 12x^2 - 8$$

1. Für $x = 0$:

$$f''(0) = 12(0)^2 - 8 = -8 \quad (\text{negativ, also ein Maximum})$$

2. Für $x = \sqrt{2}$:

$$f''(\sqrt{2}) = 12(\sqrt{2})^2 - 8 = 12 \cdot 2 - 8 = 24 - 8 = 16 \quad (\text{positiv, also ein Minimum})$$

3. Für $x = -\sqrt{2}$:

$$f''(-\sqrt{2}) = 12(-\sqrt{2})^2 - 8 = 12 \cdot 2 - 8 = 24 - 8 = 16 \quad (\text{positiv, also ein Minimum})$$

Die Extremstellen sind:

- Maximum bei $x = 0$
- Minima bei $x = \sqrt{2}$ und $x = -\sqrt{2}$

Wendestellen der Funktion

Wendestellen finden wir, indem wir $f''(x) = 0$ setzen:

$$12x^2 - 8 = 0$$

$$12x^2 = 8$$

$$x^2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Um sicherzustellen, dass es sich um Wendestellen handelt, überprüfen wir die dritte Ableitung $f'''(x)$:

$$f'''(x) = 24x$$

1. Für $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$:

$$f''' \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right) = 24 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0 \quad (\text{Wendepunkt})$$

2. Für $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$:

$$f''' \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \right) = 24 \cdot \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \neq 0 \quad (\text{Wendepunkt})$$

Die Wendestellen sind:

$$x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Symmetrie der Funktion

Die Funktion $f(x) = x^4 - 4x^2$ ist eine gerade Funktion, da alle Exponenten von x gerade sind und:

$$f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 = x^4 - 4x^2 = f(x)$$

Das bedeutet, die Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Zusammenfassung der Ergebnisse

- **Ableitungen:**

$$f'(x) = 4x^3 - 8x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 8$$

$$f'''(x) = 24x$$

- **Nullstellen:** $x = -2, 0, 2$
- **Extremstellen:**
 - Maximum bei $x = 0$
 - Minima bei $x = \sqrt{2}$ und $x = -\sqrt{2}$
- **Wendestellen:** $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$
- **Symmetrie:** Achsensymmetrisch zur y-Achse

Die Abfrage auf Englisch liefert ein sehr ähnliches Ergebnis!



Calculate the 1st derivative, 2nd derivative, 3rd derivative for the function $f(x)=x^4-4x^2$. Calculate the zeros of the function. Calculate the extreme points and the inflection points of the function. Examine the function for symmetries.



Sure, let's go through each step for the function $f(x) = x^4 - 4x^2$.

1. Derivatives

First Derivative

To find the first derivative $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^4 - 4x^2) = 4x^3 - 8x$$

Second Derivative

To find the second derivative $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(4x^3 - 8x) = 12x^2 - 8$$

Third Derivative

To find the third derivative $f'''(x)$:

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}(12x^2 - 8) = 24x$$

2. Zeros of the Function

To find the zeros of $f(x) = x^4 - 4x^2$:

$$x^4 - 4x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 4) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad \text{or} \quad x^2 - 4 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{or} \quad x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

So, the zeros are $x = -2, 0, 2$.

3. Extreme Points

To find the extreme points, we set the first derivative equal to zero and solve for x :

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 0$$

$$4x(x^2 - 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{or} \quad x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Now, we determine the nature of these critical points by examining the second derivative at these points:

$$f''(x) = 12x^2 - 8$$

Evaluate $f''(x)$ at the critical points:

- At $x = 0$:

$$f''(0) = 12(0)^2 - 8 = -8 \quad (\text{negative, indicating a local maximum})$$

- At $x = \sqrt{2}$:

$$f''(\sqrt{2}) = 12(\sqrt{2})^2 - 8 = 12 \cdot 2 - 8 = 24 - 8 = 16 \quad (\text{positive, indicating a local min})$$

- At $x = -\sqrt{2}$:

$$f''(-\sqrt{2}) = 12(-\sqrt{2})^2 - 8 = 12 \cdot 2 - 8 = 24 - 8 = 16 \quad (\text{positive, indicating a local :})$$

Therefore, the extreme points are:

- Local maximum at $x = 0$
- Local minima at $x = \pm\sqrt{2}$

4. Inflection Points

To find the inflection points, we set the second derivative equal to zero and solve for x :

$$f''(x) = 12x^2 - 8 = 0$$

$$12x^2 = 8$$

$$x^2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

So, the inflection points are at $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$.

5. Symmetry

To examine the function for symmetry, we need to determine if the function is even, odd, or neither.

A function is even if $f(-x) = f(x)$ and odd if $f(-x) = -f(x)$.

Evaluate $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 = x^4 - 4x^2 = f(x)$$

Since $f(-x) = f(x)$, the function $f(x) = x^4 - 4x^2$ is even, indicating symmetry with respect to the y-axis.

Summary

1. Derivatives:

- First: $f'(x) = 4x^3 - 8x$
- Second: $f''(x) = 12x^2 - 8$
- Third: $f'''(x) = 24x$

2. Zeros of the Function:

- $x = -2, 0, 2$

3. Extreme Points:

- Local maximum at $x = 0$
- Local minima at $x = \pm\sqrt{2}$

4. Inflection Points:

- $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

5. Symmetry:

- The function is even (symmetric with respect to the y-axis).
-

8 Oberstufenthemen – Vektoren und Matrizen

9 Oberstufenthemen – Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Aufgaben in der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind sehr textlastig und daher musst du bei diesen Aufgabentypen immer die wichtigsten Informationen aus einem Text herausziehen.

9.1 Erwartungswerte und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung kann ChatGPT sehr gut darstellen. Auch Erwartungswerte werden korrekt berechnet. Allerdings ist es auch bei diesem Thema wichtig, die Aufgabenstellung detailliert und kleinschrittig zu definieren und auf Exaktheit zu achten.

Wir wollen die folgende Aufgabe lösen lassen:

Ein Elektronikfachmarkt hat bei 1000 verkauften Geräten für einen Stückpreis von 600 € folgende Reparaturen:
0,5 % haben einen Totalausfall (Kosten von 600 €), 1 % haben eine Reparatur mit Reparaturkosten von 50 €, 3 % haben Reparaturkosten von 100 € und 5 % haben Reparaturkosten von 70 €. Erstellen Sie eine Tabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung und berechnen Sie den Erwartungswert.

Die Antwort ist wie bisher immer sehr ausführlich:

Tabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Gegeben sind die Reparaturkosten und ihre Wahrscheinlichkeiten für 1000 verkaufte Geräte:

- 0,5 % haben einen Totalausfall (Kosten: 600 €)
- 1 % haben Reparaturkosten von 50 €
- 3 % haben Reparaturkosten von 100 €
- 5 % haben Reparaturkosten von 70 €

Die Wahrscheinlichkeiten müssen in Dezimalform umgerechnet werden:

- 0,5 % = 0.005
- 1 % = 0.01
- 3 % = 0.03
- 5 % = 0.05

Tabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Reparaturkosten (in €)	Wahrscheinlichkeit
600	0.005
50	0.01
100	0.03
70	0.05

Berechnung des Erwartungswerts

Der Erwartungswert $E(X)$ einer diskreten Zufallsvariablen X mit den Werten x_i und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_i wird berechnet durch:

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot p_i$$

Setzen wir die gegebenen Werte ein:

$$E(X) = (600 \cdot 0.005) + (50 \cdot 0.01) + (100 \cdot 0.03) + (70 \cdot 0.05)$$

Berechnen wir die einzelnen Terme:

$$600 \cdot 0.005 = 3$$

$$50 \cdot 0.01 = 0.5$$

$$100 \cdot 0.03 = 3$$

$$70 \cdot 0.05 = 3.5$$

Nun summieren wir die Ergebnisse:

$$E(X) = 3 + 0.5 + 3 + 3.5 = 10$$

Zusammenfassung

Die Tabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Reparaturkosten (in €)	Wahrscheinlichkeit
600	0.005
50	0.01
100	0.03
70	0.05

Der Erwartungswert der Reparaturkosten beträgt:

$$E(X) = 10\text{€}$$

Für eine Bewertung des Erwartungswertes im Zusammenhang mit einer Kalkulation des Verkaufspreises werden wir keine ausreichende Antwort bekommen.

In diesem Fall ist der eigene Verstand gefragt. Bei der gerade berechneten Aufgabe sollte also der erwartete Wert an Reparaturen mit einem Zusatzaufschlag in die Kalkulation mit einbezogen werden und der Verkaufspreis besser auf mindestens 610 € oder 620 € erhöht werden.

9.2 Vierfeldertafeln

Kann ChatGPT Vierfeldertafeln aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung darstellen? Lass es uns ausprobieren.