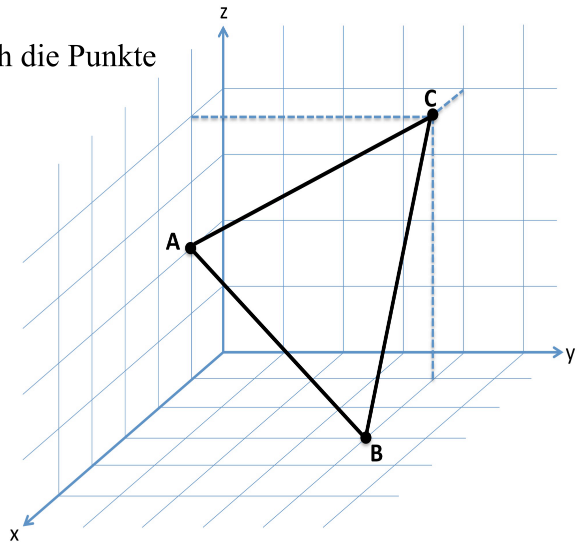
Lösungen **Kursarbeit Vektorrechnung**

1. Aufgabe: Die Eckpunkte eines Dreiecks sind gegeben durch die Punkte A (1/0/2), B (3/4/0) und C (1/4/4).



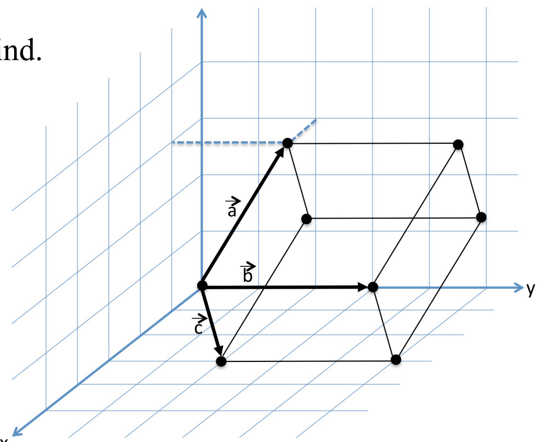
a) Bestimme die Länge der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.
b) Bestimme die 3 Winkel im Dreieck.
c) Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks.
d) Gib eine Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und B an.

2. Aufgabe: Gegeben sind die 3 Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Prüfe, ob die 3 Vektoren linear unabhängig sind.

3. Aufgabe: Die 3 Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ spannen ein Spat auf. Bestimme das Volumen des Spats.



4. Aufgabe: Eine Gerade g wird durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Prüfe, ob die Punkte P (5/-3/5) und Q (7/ -4/-4) auf der Geraden g liegen.
b) Eine weitere Gerade h verläuft durch die Punkte R (10/-13/20) und S (12/-17/26). Wie liegen die beiden Geraden g und h zueinander?

5. Aufgabe: Gegeben sind die 2 Vektoren: $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Bestimme einen Vektor, der sowohl auf $\vec{u}$ wie auch auf $\vec{v}$ senkrecht steht und die Länge 1 besitzt.

Musterlösung Klassenarbeit Vektorrechnung

1. Aufgabe:

a) $|\overline{AB}| = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2} = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \approx 4,9$
$|\overline{BC}| = \sqrt{(b_1-c_1)^2+(b_2-c_2)^2+(b_3-c_3)^2} = \sqrt{4+0+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,5$
$|\overline{CA}| = \sqrt{(c_1-a_1)^2+(c_2-a_2)^2+(c_3-a_3)^2} = \sqrt{0+16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,5$

b) Seien $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}0\\-4\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha) = -\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{0+16-4}{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{6}} = \frac{12}{4\sqrt{30}} \approx 0,55 \Rightarrow \alpha \approx 56,79°$$
$$\cos(\beta) = -\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{4+0+8}{2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{5}} = \frac{12}{4\sqrt{30}} \approx 0,55 \Rightarrow \beta \approx 56,79°$$
$$\cos(\gamma) = -\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|} = \frac{0+0+8}{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}} = \frac{8}{20} = 0,4 \Rightarrow \gamma \approx 66,42°$$

Man muss nur 2 der 3 Winkel ausrechnen und kann dann ausnutzen, dass $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ im Dreieck gilt.

c) $$A = \frac{1}{2}|(-\vec{a})\times\vec{b}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-8 & - & 8\\4 & - & 0\\0 & - & 8\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-16\\4\\-8\end{pmatrix}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-16)^2+(4)^2+(-8)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{256+16+64} = \frac{1}{2}\sqrt{336} \approx \frac{1}{2}18,33 \approx 9,17$$

d) $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$$

2. Aufgabe:
Löse $r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}+t\cdot\vec{c} = \vec{0}$:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & 1r & + & 0s & - & 1t & = & 0\\ \text{II} & 2r & - & 2s & + & 0t & = & 0\\ \text{III} & 3r & - & 5s & + & 4t & = & 0\end{array} \xrightarrow[\text{III}\to\text{III}-3\cdot\text{I}]{\text{II}\to(\text{II}-2\cdot\text{I})\cdot 0,5} \begin{array}{lccccccc} \text{I} & 1r & + & 0s & - & 1t & = & 0\\ \text{II} & 0 & - & 1s & + & 1t & = & 0\\ \text{III} & 0 & - & 5s & + & 7t & = & 0\end{array} \xrightarrow{\text{III}\to\text{III}-5\cdot\text{II}}$$

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & 1r & + & 0s & - & 1t & = & 0\\ \text{II} & 0 & - & 1s & + & 1t & = & 0\\ \text{III} & 0 & + & 0 & + & 2t & = & 0\end{array} \text{ Es folgt: } \begin{array}{l} \Rightarrow r = 0\\ \Rightarrow s = 0\\ \Rightarrow t = 0\end{array}$$

Somit sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig.

Alternativ kann man das Spatprodukt aus den 3 Vektoren bilden. Wenn dieses ungleich null ist sind die Vektoren linear unabhängig.

3. Aufgabe:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$V = |(a \times b) \cdot c| = \left| \left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix}0 & - & 9\\0 & - & 0\\3 & - & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix}-9\\0\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} \right|$$

$$= |-27+0+0| = |-27| = 27$$

4. Aufgabe:

a) $$\begin{pmatrix}5\\-3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 2 \Rightarrow P \text{ liegt auf } g.$$

$$\begin{pmatrix}7\\-4\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}4\\-5\\-3\end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \nexists\lambda \Rightarrow Q \text{ liegt nicht auf } g.$$

b) $$h : \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\-13\\20\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}$$

Die beiden Geraden sind Parallel, da die beiden Richtungsvektoren linear abhängig sind:

$$\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}.$$ Da R auf g liegt sind sie sogar identisch:

$$\begin{pmatrix}10\\-13\\20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}7\\-14\\21\end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 7.$$

5. Aufgabe:

$$\vec{w} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\begin{pmatrix}-4\\1\\-6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-4\\1\\-6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}(-4) & - & 6\\0 & - & 16\\4 & - & 0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}(-4) & - & 6\\0 & - & 16\\4 & - & 0\end{pmatrix}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}-10\\-16\\4\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-10\\-16\\4\end{pmatrix}\right|}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix}-10\\-16\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{100+256+16}} = \frac{\begin{pmatrix}-10\\-16\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{372}} = \frac{\begin{pmatrix}-10\\-16\\4\end{pmatrix}}{2\sqrt{93}} = \begin{pmatrix}\frac{-5}{\sqrt{93}}\\\frac{-8}{\sqrt{93}}\\\frac{2}{\sqrt{93}}\end{pmatrix}$$